

Calculus^{Lukion}

MAA KERTAUSKIRJA

Paavo Jäppinen

Alpo Kupiainen

Matti Räsänen

Otava

**TEHTÄVIÄ KURSSIEN MAA1–10
YDINAIHEISTA RATKAISUINEEN**

Tehtäväsarjoja kurssien ydinaiheista

Funktiot ja yhtälöt (MAA1)

1. Ilmoita luvun $3 - \pi$ **a)** itseisarvo, **b)** käänteisluku ja **c)** vastaluku, kukin kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu: Kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella luvun $3 - \pi$ **a)** itseisarvo on 0,142, **b)** käänteisluku on $-7,06$ ja **c)** vastaluku 0,142.

2. Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2} - \frac{2x}{3} = x$.

Ratkaisu: $\frac{1}{2} - \frac{2x}{3} = x \Leftrightarrow 3 - 4x = 6x \Leftrightarrow 3 = 10x \Leftrightarrow x = \frac{3}{10}$

3. Ratkaise epäyhtälö $x - \frac{x-1}{3} > 5 + \frac{x+5}{2}$.

Ratkaisu:

$$x - \frac{x-1}{3} > 5 + \frac{x+5}{2} \Leftrightarrow 6x - 2(x-1) > 30 + 3(x+5) \Leftrightarrow 4x + 2 > 3x + 45 \Leftrightarrow x > 43$$

4. Kirjan myyntihinta saadaan, kun verottomaan hintaan lisätään 8 %:n suuruinen arvonlisävero. Mikä on kirjan veroton hinta, kun sen myyntihinta on 18,90 euroa?

Ratkaisu:

Olkoon kirjan veroton hinta x (€). Silloin $x + 0,08x = 18,90$, josta $x = 17,50$ (€).

5. Etelän lomamatkan hintaa alennettiin 16 %. Kuinka monta prosenttia aikaisempaa enemmän näitä matkoja pitäisi myydä, jotta myynnin tuotto matkan järjestäjälle säilyisi entisellään?

Ratkaisu:

Olkoon matkan alkuperäinen hinta a ja myynnin kappalemäärä b , jolloin tuotto on ab . Uusi hinta on $0,84a$ ja uusi myynnin määrä xb . Koska tuotto säilyy samana, voimassa on yhtälö $ab = 0,84a \cdot xb$. Siitä $x \approx 1,190$, joten matkoja pitäisi myydä 19 % aikaisempaa enemmän.

6. Ohuen langan varaan ripustetun punnuksen heilahdusaika on suoraan verrannollinen langan pituuden neliöjuureen. Kun langan pituus on 1,55 m, heilahdusaika on 2,5 s. Laske heilahdusaika, kun langan pituus on 2,23 m.

Ratkaisu:

Kun T on heilahdusaika ja l langan pituus, niin $T = k\sqrt{l}$, jossa k on verrannollisuuskerroin. Yhtälöstä $2,5 \text{ s} = k\sqrt{1,55 \text{ m}}$ saadaan $k = \frac{2,5 \text{ s}}{\sqrt{1,55 \text{ m}}}$. Kun langan pituus on

$2,23 \text{ m}$, niin heilahdusaika on $T = \frac{2,5 \text{ s}}{\sqrt{1,55 \text{ m}}} \cdot \sqrt{2,23 \text{ m}} \approx 3,0 \text{ s}$.

7. Ratkaise yhtälö $x^{-2,4} = 64,7$ ja ilmoita tulos neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.

Ratkaisu:

Yhtälö $x^{-2,4} = 64,7$ on määritelty, kun $x > 0$. Korotetaan yhtälö potenssiin $-\frac{5}{12}$, jolloin saadaan $(8x^{-\frac{12}{5}})^{\frac{5}{12}} = 64,7^{\frac{5}{12}}$ eli $x = 64,7^{\frac{5}{12}} \approx 0,1760$.

8. Moottorivene maksoi uutena 75 000 euroa ja kuuden vuoden kuluttua 25 000 euroa. Veneen arvo aleni joka vuosi p prosenttia. Määritä luku p .

Ratkaisu: Yhtälöstä $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^6 \cdot 75\,000 = 25\,000$ saadaan aluksi $\left(1 - \frac{p}{100}\right)^6 = \frac{1}{3}$, josta $1 - \frac{p}{100} = \sqrt[6]{\frac{1}{3}}$ ja $p = 100\left(1 - \sqrt[6]{\frac{1}{3}}\right) \approx 16,7$.

9. Suure alkaa kasvaa alkuarvostaan 100 niin, että kasvu on joka tunti 2,8 %. Esitä kasvua kuvaava matemaattinen malli. Mikä on suuren arvo vuorokauden kuluttua kasvun alusta? Ilmoita tulos kokonaisluvuksi pyöristettynä.

Ratkaisu:

Tunnin pituisina aikaväleinä suure kasvaa aina 2,8 %. Kasvu on näin ollen eksponentiaalista, ja sitä kuvaa matemaattinen malli $f(t) = k \cdot a^t$, jossa k on alkuarvo ja a kasvutekijä. Koska $f(0) = k = 100$ ja $a = 1,028$, malli on $f(t) = 100 \cdot 1,028^t$. Vuorokauden kuluttua kasvun alusta suuren arvo on $f(24) = 100 \cdot 1,028^{24} \approx 194$.

10. Radioaktiivisesta aineesta hajoaa samanpituisina aikaväleinä aina sama prosentuaalinen osuus. Eräästä tyypin radioaktiivisesta isotoopista hajoaa puolet kymmenessä minuutissa. Kuinka monta prosenttia kyseisestä tyypin isotoopista hajoaa minuutissa?

Ratkaisu:

Sovelletaan eksponentiaalisen vähenemisen mallia ja saadaan $ka^{10} = \frac{1}{2}k$, josta

$a = (2^{-1})^{\frac{1}{10}} = 2^{-\frac{1}{10}}$. Tällöin aika on ilmaistu minuutteina. Minuutin kuluttua hajoamisen alusta lukien radioaktiivista ainetta on jäljellä määrä $k \cdot 2^{-\frac{1}{10}} \approx 0,933k$. Nähdään, että ainetta on hajonnut 6,7 %.

Polynomifunktiot (MAA2)

1. Kehitä polynomiksi.

a) $(3 - \frac{a}{3})^2$ b) $(-3b + 5)(-3b - 5)$ c) $(c^5 - c^3)^2$

Ratkaisu: a) $(3 - \frac{a}{3})^2 = 9 - 2a + \frac{a^2}{9}$ b) $(-3b + 5)(-3b - 5) = 9b^2 - 25$

c) $(c^5 - c^3)^2 = c^{10} - 2c^8 + c^6$

2. Jaa polynomi tekijöihin.

a) $3x^3 - 3x$ b) $2y^3 + 4y^2 + 2y$ c) $z^3 + 4z^2 - z - 4$

Ratkaisu:

a) $3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x - 1)(x + 1)$

b) $2y^3 + 4y^2 + 2y = 2y(y^2 + 2y + 1) = 2y(y + 1)^2$

c) $z^3 + 4z^2 - z - 4 = z^2(z + 4) - (z + 4) = (z + 4)(z - 1)(z + 1)$

3. Sievennä.

a) $\frac{a^4 - 1}{a^2 - 1}$ b) $\frac{(a - 1)^2 + 4a}{a + 1}$ c) $1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab}$

Ratkaisu:

a) $\frac{a^4 - 1}{a^2 - 1} = \frac{(a^2 - 1)(a^2 + 1)}{a^2 - 1} = a^2 + 1$ b) $\frac{(a - 1)^2 + 4a}{a + 1} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a + 1} = a + 1$

c) $1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + ab} = \frac{a^2 + ab - a^2 + b^2}{a^2 + ab} = \frac{b(a + b)}{a(a + b)} = \frac{b}{a}$

4. Ratkaise yhtälö.

a) $4x^2 - 11x = 0$ b) $4x^2 - 3 = 0$ c) $4x^2 - 11x - 3 = 0$

Ratkaisu:

a) $4x^2 - 11x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 11) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ tai $x = 2\frac{3}{4}$

b) $4x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $4x^2 - 11x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{8} \Leftrightarrow x = 3$ tai $x = -\frac{1}{4}$

5. Ratkaise yhtälö $f(x) + 2 = f(x + 2)$, kun $f(x) = 3x^2 - 2x$.

Ratkaisu:

$$f(x) + 2 = f(x + 2) \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 3(x + 2)^2 - 2(x + 2) \Leftrightarrow 12x = -6 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

6. Ratkaise yhtälö $x^2 = 2tx + 3t^2$ ($t \in \mathbf{R}$). Millä t :n arvolla juurten summa ja tulo ovat yhtä suuret?

Ratkaisu:

$$x^2 = 2tx + 3t^2 \Leftrightarrow x^2 - 2tx - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow x = t \pm 2t \Leftrightarrow x = 3t \text{ tai } x = -t \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Juurten summa ja tulo ovat yhtä suuret, kun $2t = -3t^2$ eli kun $t = 0$ tai $t = -\frac{2}{3}$.

7. Määritä vakiolle t sellainen arvo, että murtolauseke $\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + tx + 6}$ supistuu, ja esitä sitten supistettu murtolauseke.

Ratkaisu:

Murtolausekkeen $\frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + tx + 6}$ osoittajan nollakohdat ovat 6 ja -2 . Lauseke supistuu, kun myös nimittäjän nollakohta on 6 tai -2 . Tästä saadaan ehdot $36 + 6t + 6 = 0$ ja $4 - 2t + 6 = 0$. Näistä ratkeaa $t = -7$ tai $t = 5$.

$$\text{Kun } t = -7, \text{ saadaan } \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 7x + 6} = \frac{(x-6)(x+2)}{(x-6)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}.$$

$$\text{Kun } t = 5, \text{ saadaan } \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x-6)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x-6}{x+3}.$$

8. Ratkaise yhtälö.

a) $x^3 - 4x^2 + 2x = 0$ b) $(x-1)^3 = x-1$ c) $x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0$

Ratkaisu:

a) $x^3 - 4x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 2 \pm \sqrt{2}$

b) $(x-1)^3 = x-1 \Leftrightarrow (x-1)^3 - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1 \text{ tai } x = 0 \text{ tai } x = 2$

c) $x^3 - 6x^2 - 2x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-6) - 2(x-6) = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x^2 - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 6 \text{ tai } x = \pm\sqrt{2}$

9. Ratkaise epäyhtälö.

a) $x^2 < 8$ b) $2x^2 \geq 3x - 2$ c) $x^3 \leq 2x^2 + 15x$

Ratkaisu:

a) $x^2 < 8 \Leftrightarrow x^2 - 8 < 0$. Nollakohdat ovat $x = \pm 2\sqrt{2}$ ja kuvaajaparaabeli aukeaa ylöspäin, joten ratkaisu on $x < -2\sqrt{2}$ tai $x > 2\sqrt{2}$.

b) $2x^2 \geq 3x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Reaalisia nollakohtia ei ole. Kuvaajaparaabeli aukeaa ylöspäin, joten kaikki reaalityyppiset x toteuttavat epäyhtälön.

c) $x^3 \leq 2x^2 + 15x \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 15) \leq 0$. Nollakohdat ovat 0, 5 ja -3 . Merkkikaavion mukaan ratkaisu on $x \leq -3$ tai $0 \leq x \leq 5$.

x	-	-	+	+
$x^2 - 2x - 15$	+	-	-	+
tulo	-	+	-	+
	-3	0	5	

10. Osoita, että polynomifunktioiden $f(x) = 2x^4 - 0,2x^2 - 1$ ja $g(x) = x^4 - 0,5x^2 - 1,02$ kuvaajilla ei ole yhteisiä pisteitä.

Ratkaisu:

On annettu polynomifunktiot $f(x) = 2x^4 - 0,2x^2 - 1$ ja $g(x) = x^4 - 0,5x^2 - 1,02$.

Merkitään $2x^4 - 0,2x^2 - 1 = x^4 - 0,5x^2 - 1,02$, josta $x^4 + 0,3x^2 + 0,02 = 0$ eli

$(x^2)^2 + 0,3x^2 + 0,02 = 0$. Saadaan $x^2 = -0,1$ tai $x^2 = -0,2$, joten yhtälöllä ei ole reaaliuusia. Se merkitsee, että funktioiden f ja g kuvaajilla ei ole yhteisiä pisteitä.

Geometria (MAA3)

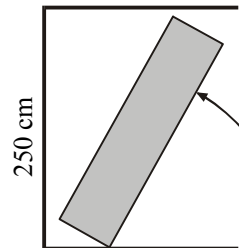
1. Suorakulmaisen kolmion kateetin a pituus on 37 m. Laske kolmion pinta-ala, kun kateetti b on metriä lyhyempi kuin hypotenuusa. Ilmoita vastaus hehtaareina yhden aarin tarkkuudella.

Ratkaisu:

Jos hypotenuusan pituus on x , toisen kateetin pituus on $x - 1$ (m). Koska tunnetun kateetin pituus on 37 m, saadaan yhtälö $37^2 + (x - 1)^2 = x^2$, josta $x = 685$. Kolmion

pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 37 \cdot 684 \text{ m}^2 = 12\,654 \text{ m}^2$. Tulos hehtaareina aarin tarkkuudella on 1,27 ha.

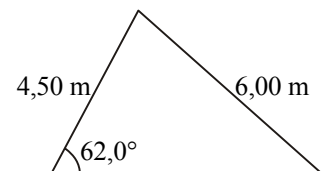
2. Vaatekaappi, jonka syvyys on 60 cm, aiotaan nostaa pystyyn 250 cm korkean huoneen seinän viereen. Kuinka korkea saa kaappi enintään olla, jotta pystyyn nostaminen onnistuisi?



Ratkaisu:

Kaappi mahtuu kääntymään huoneessa pystyyn, jos sen sivuseinämän lävistäjä on enintään 250 cm. Silloin kaapin korkeus on $h = \sqrt{250^2 - 60^2} \text{ cm} \approx 242,7 \text{ cm}$. Senttimetrin tarkkuudella korkeus saa olla enintään 242 cm.

3. Laske oheisen kolmion kolmannen sivun pituus.



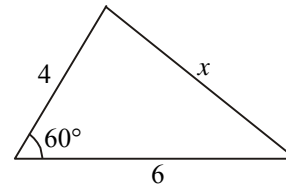
Ratkaisu:

Sinilauseen mukaan $\frac{6,00}{\sin 62,0^\circ} = \frac{4,50}{\sin \beta}$, josta $\beta \approx 41,5^\circ$. (Kulma β ei voi olla tylppä,

koska sitä vastaisi silloin kolmion pisin sivu.) Kolmas kulma on $78,5^\circ$. Saadaan

$\frac{x}{\sin 76,5^\circ} = \frac{6,00}{\sin 62,0^\circ}$ ja siitä $x \approx 6,61$ (m). Kolmas sivu voidaan laskea myös kosinilauseetta soveltamalla.

4. Määritä oheisessa kolmiossa sivun x pituus.



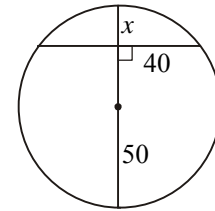
Ratkaisu:

Soveltamalla kolmioon kosinilausetta saadaan $x^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$ ja siitä $x = 2\sqrt{7} \approx 5,3$.

5. Ympyrän halkaisijan pituus on 100 mm. Kuinka pitkiä ovat ne osat, joihin halkaisijaa vastaan kohtisuoraan piirretty 80 mm:n pituinen jänne jakaa halkaisijan?

Ratkaisu:

Pisteen potenssia soveltamalla saadaan $x(100 - x) = 40^2$, josta $x = 20$ tai $x = 80$. Halkaisijan osat ovat siis 20 mm ja 80 mm.

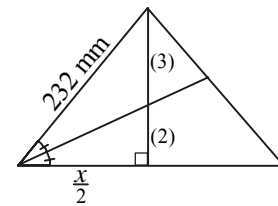


6. Tasakylkisen kolmion kylki on 232 mm, ja kantakulman puolittaja jakaa huipusta piirretyn korkeuden suhteessa 3 : 2. Kuinka pitkä on kolmion kanta?

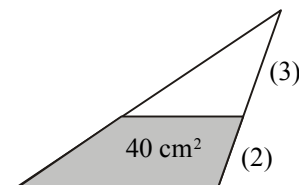
Ratkaisu:

Kulmanpuolittajalauseen mukaan $\frac{x/2}{232} = \frac{2}{3}$, josta tasakylkisen kolmion kanta on $x \approx 309,3$ mm.

Huomautus: Korkeusjanan jakosuhte toisessa järjestyksessä ei ole mahdollinen, koska silloin kannan puolikas olisi kylkeä pitempi.



7. Kolmion kannan suuntainen suora jakaa kolmion sivun huipusta lukien suhteessa 3 : 2 ja erottaa kannan puolelle puolisuunnikkaan, jonka ala on 40 cm^2 . Määritä alkuperäisen kolmion ala.



Ratkaisu:

Olkoon alkuperäisen kolmion ala A . Kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella

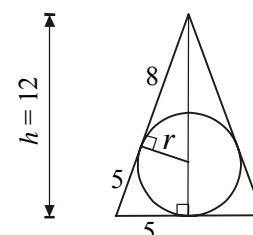
saadaan $\frac{A}{A - 40} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$. Tästä ratkaisuna $A = 62,5 \text{ (cm}^2\text{)}$.

8. Tasakylkisen kolmion kyljen pituus on 13 ja kannan 10 pituusyksikköä. Määritä kolmion sisään piirretyn ympyrän säde.

Ratkaisu:

Yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista muodostetaan

verranto $\frac{r}{8} = \frac{5}{12}$, jonka ratkaisuna $r = 3\frac{1}{3}$.



9. Vesisäiliö on kärjellään olevan suoran ympyräkartion muotoinen. Mittari näyttää, että säiliö on puolillaan vettä. Kuinka monta prosenttia kartion korkeudesta on tällöin veden alla?

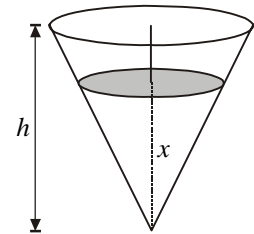
Ratkaisu:

Veden täyttämä säiliön osa ja koko säiliö ovat yhdenmuotoisia kappaleita. Niiden tilavuuksien suhde on sama kuin korkeuk-

sien suhteen kuutio. Saadaan yhtälö $\left(\frac{x}{h}\right)^3 = \frac{1}{2}$, josta

$x = h \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,79h$. Kartion korkeudesta on tämän mukaan

veden alla 79 %.



10. Kuinka monta prosenttia pallon sisään piirretyn kuution tilavuus pallon tilavuudesta?

Ratkaisu:

Olkoon pallon säde r ja kuution särmä s . Kuution avaruusläivistäjä on pallon halkaisijan mittainen, ts. $s\sqrt{3} = 2r$. Tällöin kuution tilavuus on $\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3$.

Kuution tilavuus on pallon tilavuudesta $\frac{\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^3}{\frac{4\pi r^3}{3}} \cdot 100\% \approx 36,8\%$.

Analyttinen geometria (MAA4)

1. Johda yhtälö pisteiden $(-1, 2)$ ja $(2, -2)$ kautta kulkevalle suoralla ja määritä suoran suuntakulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu:

Pisteiden $(-1, 2)$ ja $(2, -2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{-2-2}{2-(-1)} = -\frac{4}{3}$.

Suoran yhtälö kulmakerroinmuodossa on $y - 2 = -\frac{4}{3}(x + 1)$ eli $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$. Normaalimuotoinen yhtälö on $4x + 3y - 2 = 0$. Suuntakulman likiarvo $-53,1^\circ$ saadaan yhtälöstä $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$.

2. Johda yhtälö janan $A(-2, 5)B(0, -1)$ keskinormaalille.

Ratkaisu:

Janan $A(-2, 5)B(0, -1)$ keskipiste on $(-1, 2)$ ja kulmakerroin $\frac{-1-5}{0-(-2)} = -3$. Normaali-

lin kulmakerroin on $\frac{1}{3}$ ja yhtälö $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1)$ eli $x - 3y + 7 = 0$.

3. Millä vakion m arvolla suorat $2x + my - 1 = 0$ ja $x - my - m = 0$ ovat
a) yhdensuuntaiset, **b)** kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Ratkaisu:

Suoran $2x + my - 1 = 0$ eli $y = -\frac{2}{m}x + \frac{1}{m}$ kulmakerroin on $-\frac{2}{m}$, $m \neq 0$, ja suoran

$x - my - m = 0$ eli $y = \frac{1}{m}x - 1$ kulmakerroin $\frac{1}{m}$.

a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret tai sitten ne ovat y -akselin suuntaisia suoria. Kulmakertoimet ovat yhtä suuret, kun $-\frac{2}{m} = \frac{1}{m}$. Yhtälö on identtisesti epätosi. Kun $m = 0$, suorien yhtälöt ovat $2x - 1 = 0$ ja $x = 0$, jolloin suorat ovat siis yhdensuuntaiset.

b) Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $-\frac{2}{m} \cdot \frac{1}{m} = -1$. Yhtälön ratkaisut ovat $m = \pm\sqrt{2}$.

4. Johda yhtälö ympyrälle, jonka halkaisijana on jana $A(1, -2)B(5, 4)$. Esitä yhtälö sekä keskipistemuodossa että yleisessä muodossa. Laske pisteen $(7, -5)$ lyhin etäisyys kyseisen ympyrän kehästä.

Ratkaisu:

Ympyrän keskipisteenä on janan $A(1, -2)B(5, 4)$ keskipiste $(3, 1)$ ja säteenä puolet janan pituudesta $\sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$. Ympyrän yhtälö keskipistemuodossa on $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$ ja normaalimuodossa $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$.

Pisteen $(7, -5)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä on $\sqrt{(-4)^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$. Pisteen lyhin etäisyys ympyrän kehästä on $2\sqrt{13} - \sqrt{13} = \sqrt{13}$.

5. Määritä sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(2, 3)$ ja joka sivuaa suoraa $y = 2x + 2$.

Ratkaisu:

Piste $(2, 3)$ on säteen etäisyydellä suorasta $2x - y + 2 = 0$, joten

$r = \frac{|2 \cdot 2 - 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Ympyrän yhtälön keskipistemuoto on

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{9}{5}$ ja yleinen muoto $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11\frac{1}{5} = 0$.

6. Millä t :n arvoilla yhtälö $x^2 + y^2 + 2x + ty + t = 0$ esittää ympyrää?

Ratkaisu:

Yhtälö $x^2 + y^2 + 2x + ty + t = 0$ saatetaan neliöiksi täydentämällä muotoon

$(x + 1)^2 + (y + \frac{t}{2})^2 = \frac{t^2}{4} - t + 1$. Yhtälö esittää ympyrää, jos $\frac{t^2}{4} - t + 1 =$

$(\frac{t}{2} - 1)^2 > 0$. Näin on, kun $t \neq 2$.

7. Ympyrä kulkee pisteiden $(1, 3)$, $(0, -2)$ ja $(5, 3)$ kautta. Johda ympyrän yhtälö.

Ratkaisu:

Sijoitetaan pisteiden $(1, 3)$, $(0, -2)$ ja $(5, 3)$ koordinaatit vuorollaan yhtälöön

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \text{ Muodostuu yhtälöryhmä } \begin{cases} a + 3b + c = -10 \\ -2b + c = -4 \\ 5a + 3b + c = -34, \end{cases} \text{ jonka rat-}$$

kaisu on $a = -6$, $b = 0$ ja $c = -4$. Ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - 6x - 4 = 0$.

8. Määritä paraabelin $y = -x^2 + 6x + 7$ nollakohdat, akselin yhtälö ja huippu.

Ratkaisu:

Paraabelin $y = -x^2 + 6x + 7$ nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 7$. Paraabeli aukeaa alaspäin. Sen akseli on y -akselin suuntainen ja leikkaa x -akselin nollakohtien puolivälissä. Akselin yhtälö on siis $x = 3$. Huippu on paraabelin ja sen akselin leikkauspiste $(3, 16)$.

9. Mitä käyrää yhtälö esittää?

- a) $2x^2 + y = 9$ b) $2x + y = 9$ c) $2x^2 + 2y^2 = 9$
 d) $x + y^2 = 9$ e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ f) $x^2 - y^2 = 0$

Ratkaisu:

a) $2x^2 + y = 9 \Leftrightarrow y = -2x^2 + 9$, alaspäin aukeava paraabeli

b) $2x + y = 9 \Leftrightarrow y = -2x + 9$, suora, jonka kulmakerroin on -2 .

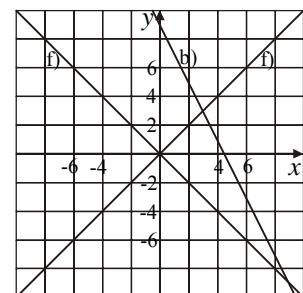
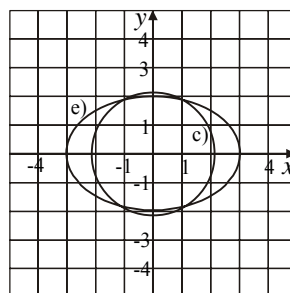
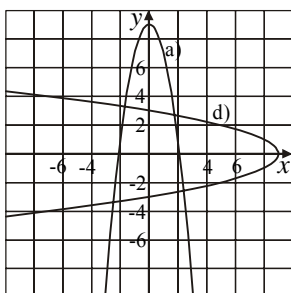
c) $2x^2 + 2y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$, ympyrä, keskipiste origo ja säde $\frac{3}{\sqrt{2}}$

d) $x + y^2 = 9 \Leftrightarrow x = -y^2 + 9$, vasemmalle aukeava paraabeli

e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, ellipsi, puoliakselien pituudet 3 ja 2

f) $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$, suorat $y = x$ ja $y = -x$

Kaikki käyrät on esitetty alla olevissa kuvissa.



10. Ratkaise **a)** yhtälö $|2x + 1| = |x - 3|$, **b)** epäyhtälö $|x - 5| < 2x$.

Ratkaisu:

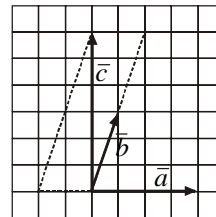
a) Kun alkuperäinen yhtälö $|2x + 1| = |x - 3|$ korotetaan toiseen potenssiin, saadaan yhtäpitävästi $(2x + 1)^2 = (x - 3)^2$, josta edelleen $3x^2 + 10x - 8 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisuna $x = -4$ tai $x = \frac{2}{3}$.

b) Annettu epäyhtälö $|x - 5| < 2x$ toteutuu vain positiivisilla x :n arvoilla ja on tällöin yhtäpitävä kaksoisepäyhtälön $-2x < x - 5 < 2x$ kanssa. Tämän ratkaisuna $x > 1\frac{2}{3}$.

Vektorit (MAA5)

1. Lausu oheisen kuvan vektori \vec{c} vektoreiden \vec{a} ja \vec{b} lineaarikombinaationa.

Ratkaisu: Piirroksen mukaan $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$.



2. Muodosta vektori \vec{AB} , kun A on $(-2, 3)$ ja B on $(-1, 4)$.

Ratkaisu:

Kun A on $(-2, 3)$ ja B on $(-1, 4)$, niin $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = -\vec{i} + 4\vec{j} - (-2\vec{i} + 3\vec{j}) = \vec{i} + \vec{j}$.

3. Laske vektoreiden $-7\vec{i} + \vec{j}$ ja $4\vec{i} + 2\vec{j}$ välinen kulma ja ilmoita se asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu:

Kun $\vec{a} = -7\vec{i} + \vec{j}$ ja $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, niin $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-28 + 2}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-26}{10\sqrt{10}}$, josta

kulma $(\vec{a}, \vec{b}) \approx 145,3^\circ$.

4. Määritä vakion t arvo niin, että vektorit $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} + t\vec{j}$ ovat **a)** yhdensuuntaiset, **b)** kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Ratkaisu:

a) Vektorit $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} + t\vec{j}$ ovat yhdensuuntaiset, jos on sellainen luku s , että $\vec{i} - 3\vec{j} = s(-2\vec{i} + t\vec{j}) = -2s\vec{i} + st\vec{j}$. Kertoimien vertailu antaa $-2s = 1$ ja $st = -3$, joista $s = -\frac{1}{2}$ ja $t = 6$.

b) Vektorit $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ja $\vec{b} = -2\vec{i} + t\vec{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan tarkalleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla eli $-2 - 3t = 0$. Tästä $t = -\frac{2}{3}$.

5. Määritä piste, joka jakaa janan $A(-3, 6)B(5, -1)$ suhteessa 4 : 5.

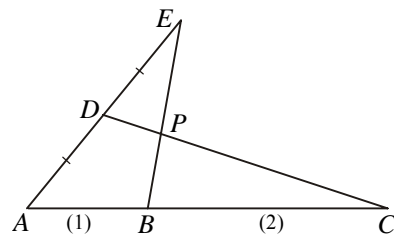
Ratkaisu:

Määritetään kysytyn pisteen P paikkavektori.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 6\vec{j} + \frac{4}{9}(8\vec{i} - 7\vec{j}) = \frac{5}{9}\vec{i} + \frac{26}{9}\vec{j}$$

Kysytty piste on $(\frac{5}{9}, 2\frac{8}{9})$.

6. Oheisessa kuvassa piste D on janan AE keskipiste, ja piste B jakaa janan AC suhteessa 1 : 2. Missä suhteessa piste P jakaa janat DC ja BE ?



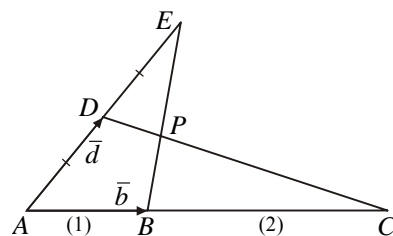
Ratkaisu:

Otetaan käyttöön kuvan mukaiset vektorit \vec{b} ja \vec{d} ja merkitään $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BE}$ ja $\overrightarrow{DP} = s\overrightarrow{DC}$. Koska $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$, niin pätee $\vec{b} + t(2\vec{d} - \vec{b}) = \vec{d} + s(3\vec{b} - \vec{d})$

eli $(1-t)\vec{b} + 2t\vec{d} = 3s\vec{b} + (1-s)\vec{d}$. Kertoimien ver-

tailu antaa $1-t=3s$ ja $2t=1-s$. Näistä $t = \frac{2}{5}$ ja

$s = \frac{1}{5}$. Tulos merkitsee, että BE jakautuu suhteessa 2 : 3 ja DC suhteessa 1 : 4.



7. Kolmion kärkipisteet ovat $A(2, 2, 1)$, $B(-2, 1, 2)$ ja $C(2, -2, 1)$. Laske kulman A suuruus.

Ratkaisu:

Kun kolmion kärkipisteet ovat $A(2, 2, 1)$, $B(-2, 1, 2)$ ja $C(2, -2, 1)$, niin

$\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ja $\overrightarrow{AC} = -4\vec{j}$. Tällöin $\cos A = \frac{4}{4\sqrt{16+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$. Kulman A suuruus on $76,4^\circ$.

8. Vektori $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ on tason $ax + by - 3z = 5$ suuntainen, ja taso sisältää pisteen $(1, -1, -2)$. Määritä vakioiden a ja b arvot.

Ratkaisu:

Tason $ax + by - 3z = 5$ normaalivektori on $a\vec{i} + b\vec{j} - 3\vec{k}$. Koska se on kohtisuorassa vektoria $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ vastaan, niin $a + b - 3 = 0$. Siitä, että piste $(1, -1, -2)$ on tasossa, saadaan yhtälö $a - b + 6 = 5$. Yhtälöistä ratkeaa $a = 1$ ja $b = 2$.

9. On annettu pisteet $A(-1, 2, 1)$ ja $B(3, -2, 2)$ sekä taso $2x - y + 3z + 16 = 0$. Missä pisteessä suora AB leikkaa tason?

Ratkaisu:

Pisteiden $A(-1, 2, 1)$ ja $B(3, -2, 2)$ kautta kulkevan suoran suuntavektoriksi voidaan valita $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$. Suoran parametriesitykseksi saadaan $x = -1 + 4t$, $y = 2 - 4t$

ja $z = 1 + t$. Sijoitus tason yhtälöön antaa $2(-1 + 4t) - (2 - 4t) + 3(1 + t) + 16 = 0$. Tästä $t = -1$. Suora AB leikkaa tason pisteessä $(-5, 6, 0)$.

10. On annettu suorat $L_1 : \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ ja $L_2 : \frac{x+5}{-1} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{3}$.

a) Laske suorien L_1 ja L_2 välinen kulma.

b) Osoita, että suorat L_1 ja L_2 leikkaavat toisensa ja määritä leikkauspiste.

Ratkaisu:

On annettu suorat $L_1 : \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ ja $L_2 : \frac{x+5}{-1} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{3}$.

a) Suorien L_1 ja L_2 suuntavektoreiksi sopivat $\vec{s}_1 = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ja

$\vec{s}_2 = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Niiden väliselle kulmalle pätee $\cos \alpha = \frac{-2 - 8 + 9}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{26}}$, josta

$\alpha \approx 92,7^\circ$. Suorien välinen kulma on siis $87,3^\circ$.

b) Suoran L_1 parametriesitys on $x = -5 + 2t$, $y = 3 - 2t$ ja $z = -1 + 3t$. Vastaavasti

$$L_2 \text{ :lle saadaan } x = -5 - s, y = 9 + 4s \text{ ja } z = 8 + 3s. \text{ Yhtälöryhmä } \begin{cases} -5 + 2t = -5 - s \\ 3 - 2t = 9 + 4s \\ -1 + 3t = 8 + 3s \end{cases}$$

toteutuu arvoilla $t = 1$ ja $s = -2$. Suorien leikkauspiste on $(-3, 1, 2)$.

Todennäköisyys ja tilastot (MAA6)

1. Laske oheisen jakauman keskiarvo ja otoskeskihajonta, kun tilastomuuttujan x arvoissa esiintyvä luku a on positiivinen reaaliluku.

x	a	$2a$	$3a$	$4a$
f	6	5	4	1

Ratkaisu: Keskiarvo on $\frac{6a + 5 \cdot 2a + 4 \cdot 3a + 4a}{16} = 2a$ ja otoskeskihajonta

$$\sqrt{\frac{6(a-2a)^2 + 5(2a-2a)^2 + 4(3a-2a)^2 + (4a-2a)^2}{15}} = \sqrt{\frac{14}{15}} a \approx 0,97a.$$

2. Erään lukion opettajakunnan ikäjakauma oli tilaston laatimishetkellä seuraava:

ikä	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50	51–55	56–60
opettajia	3	3	6	8	8	10	6

a) Ilmoita moodiluokan todelliset rajat ja luokkakeskus.

b) Laske opettajien keski-ikä.

c) Mikä diagrammityyppi sopii mielestäsi parhaiten ikäjakauman graafiseen esittelyyn? Perustelee.

Ratkaisu:

a) Moodiluokka on 51–55. Koska ikä ilmaistaan pyöristämättä sitä ylöspäin, todelliset rajat ovat 51 ja 56. Luokkakeskus on 53,5.

b) Keski-ian laskemisessa käytetään luokkakeskuksia 28,5; 33,5; 38,5; 43,5; 48,5; 53,5 ja 58,5. Opettajien keski-ikä on 46,3 vuotta.

c) Ikä on jatkuva tilastomuuttuja, joten ikäjakauman graafiseen esittelyyn soveltuu parhaiten histogrammi.

- 3.** Koripalloilija onnistuu heittämään korin todennäköisyydellä 0,6. Millä todennäköisyydellä hän saa vähintään kolme koria viidellä heitolla?

Ratkaisu:

$$P(\text{vähintään kolme koria}) = P(\text{kolme koria}) + P(\text{neljä koria}) + P(\text{viisi koria})$$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4 + 0,6^5 \approx 0,68.$$

- 4.** Olkoon vektori $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ja vektori $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, jossa a ja b ovat nopalla arvottuja kertoimia. Millä todennäköisyydellä vektorit \vec{u} ja \vec{v} ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

Ratkaisu:

Vektorit $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ja $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo $a - 2b$ on nolla. Tällöin $a = 2b$, ja sen ehdon täyttävät silmälukuparit $(2, 1)$, $(4, 2)$ ja $(6, 3)$. Koska erilaisia silmälukupareja on 36, kysytty todennäköisyys on $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

- 5.** Maljassa on neljä valkoista ja kolme mustaa palloa. Maljasta nostetaan satunnaisesti kolme palloa. Millä todennäköisyydellä
- a)** saadaan vähintään yksi musta pallo,
b) enintään yksi musta pallo?

Ratkaisu:

$$\text{a) } P(\text{vähintään yksi musta pallo}) = 1 - P(\text{ei yhtään mustaa palloa})$$

$$= 1 - \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{31}{35} \approx 0,89$$

$$\text{b) } P(\text{enintään yksi musta pallo}) = P(\text{ei yhtään mustaa palloa}) + P(\text{yksi musta pallo})$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{22}{35} \approx 0,63$$

Toinen ratkaisutapa:

$$\text{a) } P(\text{vähintään yksi musta pallo}) = 1 - P(3 \text{ valkoista palloa}) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{31}{35}$$

$$\text{b) } P(\text{ei yhtään mustaa palloa}) + P(1 \text{ musta ja } 2 \text{ valk. palloa}) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{22}{35}$$

6. Montako erilaista 5-kirjaimista "sanaa" voidaan muodostaa kirjaimista R, I, T, V, A, kun **a)** kutakin kirjainta voi käyttää vain kerran, **b)** yksi kirjaimista saa esiintyä kaksikin kertaa?

Ratkaisu:

a) Kun kutakin kirjainta saa käyttää vain kerran, erilaisia "sanoja" saadaan $5! = 120$.

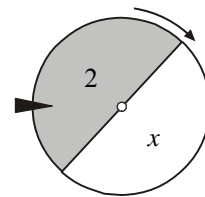
b) 1° Kaikki kirjaimet eri kirjaimia: sanoja 120

2° Yksi kirjaimista esiintyy kahdesti: tämän kirjaimen valintatapoja on 5, niiden sijoitustapoja $\binom{5}{2}$, ja loput paikat voi täyttää $4 \cdot 3 \cdot 2$ eri tavalla. Tällaisia sanoja

on kaikkiaan $5 \cdot \binom{5}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1200$.

Erilaisia sanoja saadaan yhteensä $120 + 1200 = 1320$ kappaletta.

7. Pyöräyttämällä oheista onnenpyörää saadaan tulokseksi jompikumpi luvuista 2 ja x . Onnenpyörää pyöräytetään kolme kertaa. Satunnaismuuttujan \underline{x} arvona on tuloksiksi saatujen lukujen summa. Määritä x niin, että $E(\underline{x}) = 12$.



Ratkaisu: Alla olevassa taulukossa on esitetty satunnaismuuttujan \underline{x} jakauma.

x_i	6	$4 + x$	$2 + 2x$	$3x$
$P(\underline{x} = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(\underline{x}) = \frac{1}{8} \cdot 6 + \frac{3}{8} (4 + x) + \frac{3}{8} (2 + 2x) + \frac{1}{8} \cdot 3x = 12, \text{ kun } x = 6.$$

8. Satunnaismuuttuja \underline{x} noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on 6 ja keskihajonta 2. Laske todennäköisyys $P(5 \leq \underline{x} \leq 7)$.

$$\text{Ratkaisu: } P(5 \leq \underline{x} \leq 7) = \Phi\left(\frac{7-6}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5-6}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \approx 0,383$$

9. Jatkuvan satunnaismuuttujan \underline{x} tiheysfunktio on määritelty yhtälöllä

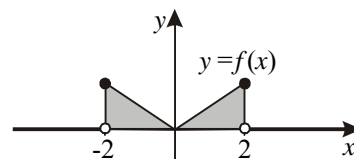
$$f(x) = \begin{cases} a|x|, & \text{kun } -2 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases} \text{ Määritä } \mathbf{a)} \text{ } a\text{:n arvo, } \mathbf{b)} \text{ } P(\underline{x} < 1).$$

Ratkaisu: **a)** Tiheysfunktiossa $f(x) = \begin{cases} a|x|, & \text{kun } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$ tulee vakion a joka tapauksessa olla positiivinen. Oheisessa kuvassa on hahmoteltu tiheysfunktion kuvaajan muoto. Vakio a määräytyy pinta-alaehdosta

muoto. Vakio a määräytyy pinta-alaehdosta

$$2\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2a\right) = 1, \text{ josta } a = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{b)} \text{ } P(\underline{x} < 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$



10. Punavihervärisokeus on yleisin värisokeusmuoto. Siitä kärsii noin 8 % suomalaismiehistä. Nuorten miesten värinäkö testataan kutsunnoissa, sillä värisokeus voi olla este armeijauralla etenemiselle. Mikä on todennäköisyys, että kutsuntoihin osallistuneiden 650 nuorukaisen joukossa on punavihersokeita enemmän kuin 55?

Ratkaisu:

Olkoon \underline{x} punavihersokeiden määrä 650 nuorukaisen joukossa. Silloin todennäköisyys $P(\underline{x} = k) = \binom{650}{k} \cdot 0,08^k \cdot 0,92^{650-k}$, joten $\underline{x} \sim \text{Bin}(650; 0,08)$. Koska lukumäärä

on suhteellisen suuri, sovelletaan tehtävässä normaalijakaumaa $N(np, \sqrt{npq}) = N(52; 6,92)$. Saadaan $P(\underline{x} > 55) = 1 - P(\underline{x} \leq 54) \approx 1 - \Phi(0,29) \approx 1 - 0,6141 = 0,3859$. Kysytty todennäköisyys on noin 39 %.

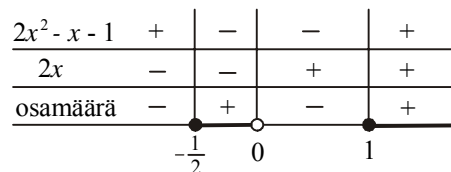
Derivaatta (MAA7)

1. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{2x} \leq x - \frac{1}{2}$.

Ratkaisu:

$\frac{1}{2x} \leq x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{2x} \geq 0$. Ratkaistaan nollakohdat ja laaditaan merkkikaavio. Sen

mukaan ratkaisu on $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ tai $x \geq 1$.



2. Ratkaise yhtälö $\frac{2a}{x-1} = \frac{a+1}{x+1}$, jossa a on reaaliluku. Millä a :n arvoilla yhtälöllä ei ole ratkaisua?

Ratkaisu:

Yhtälö $\frac{2a}{x-1} = \frac{a+1}{x+1}$ on määritelty, kun $x \neq \pm 1$. Ristiin kertomalla päästään yhtälöön

$2ax + 2a = ax + x - a - 1$, josta $(a-1)x = -3a-1$ ja edelleen $x = \frac{-3a-1}{a-1} = \frac{3a+1}{1-a}$,

kun $a \neq 1$. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, kun $a = 1$. Ratkaisua ei ole myöskään a :n arvoilla 0 ja -1 , jotka saadaan asettamalla $\frac{3a+1}{1-a} = \pm 1$.

3. Määritä raja-arvo.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{6}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-4x}{4-3x}$

Ratkaisu: a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x}-\sqrt{6}} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{6})(\sqrt{x}+\sqrt{6})}{\sqrt{x}-\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-4x}{4-3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}-4}{\frac{4}{x}-3} = \frac{4}{3}$

4. Funktiolle $f(x) = \left(\frac{2}{x-1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x-3}$ voidaan määritellä kohdassa $x = 3$ arvo niin, että funktio tulee kyseisessä kohdassa jatkuvaksi. Määritä tämä arvo.

Ratkaisu:

$$f(x) = \left(\frac{2}{x-1} - 1\right) \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{3-x}{x-1} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{1}{1-x}. \text{ Raja-arvo kohdassa } x = 3 \text{ on } -\frac{1}{2},$$

joten määritellään $f(3) = -\frac{1}{2}$.

5. Johda derivaatan määritelmää käyttäen $f'(2)$, kun $f(x) = 2x^2 - 1$.

Ratkaisu:

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 - 1 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8+2h)}{h} = 8$$

6. Käyrälle $y = \sqrt{x}$ piirretään sekantti origon ja pisteen $(4, 2)$ kautta. Johda yhtälö sille käyrän tangentille, joka on sanotun sekantin suuntainen.

Ratkaisu:

Käyrälle $y = \sqrt{x}$ piirretään sekantti origon ja pisteen $(4, 2)$ kautta, jolloin sekantin kulmakerroin on $\frac{1}{2}$. Derivaatta $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ saa arvon $\frac{1}{2}$ kohdassa $x = 1$. Pisteen $(1, 1)$ kautta piirretty käyrän tangentti on em. sekantin suuntainen. Tangentin yhtälö on $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ eli $x - 2y + 1 = 0$.

7. Millä väleillä funktio $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 11$ on aidosti kasvava ja millä aidosti vähenevä?

Ratkaisu:

Funktio $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 11$ on polynomifunktiona kaikkialla jatkuva ja derivoituva. Derivaatan $f'(x) = 3x^2 - 6x - 45$ nollakohdat ovat 5 ja -3 . Derivaatan merkkitarkastelusta ilmenee, että funktio on aidosti kasvava väleillä $]-\infty, -3]$ ja $[5, \infty[$. Väleillä $[-3, 5]$ funktio on aidosti vähenevä.

8. Millä vakion a arvoilla yhtälöllä $x^3 + 3x^2 + a = 0$ on täsmälleen yksi reaalijuuri?

Ratkaisu:

Merkitään $f(x) = x^3 + 3x^2 + a$. Funktio on jatkuva ja derivoituva \mathbf{R} :ssä. Derivaatan $f'(x) = 3x^2 + 6x$ merkkitarkastelu osoittaa, että funktiolla on maksimi $f(-2) = 4 + a$ ja minimi $f(0) = a$. Kolmannen asteen polynomifunktiona funktiolla f voi olla enintään kolme nollakohtaa. Nollakohtia on tarkalleen yksi, jos maksimi on negatiivinen (kuten silloin minimikin) tai minimi on positiivinen (kuten silloin maksimikin). Saadaan ehdot $4 + a < 0$ tai $a > 0$. Tuloksena on, että kun $a < -4$ tai $a > 0$, yhtälöllä $x^3 + 3x^2 + a = 0$ on täsmälleen yksi reaalijuuri.

9. Määritä funktion $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$ ääriarvot, määrittelyjoukko ja arvojoukko.

Ratkaisu:

Funktio $f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$ on määritelty, kun $x \neq -\frac{3}{2}$. Määrittelyjoukko on siis

$\mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Derivaatan $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x}{(2x+3)^2}$

$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↘	↙	↘	↗
	-3	$-\frac{3}{2}$	0	

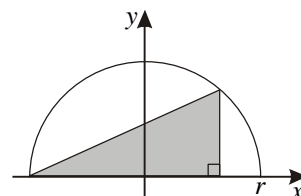
merkkitarkastelu johtaa päätelmään, että funk-

tiolla on paikallinen maksimi $f(-3) = -3$ ja minimi $f(0) = 0$. Raja-arvo

$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$ ja raja-arvo $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x) = \infty$. Saaduista tuloksista on pääteltävissä,

että arvojoukko on $]-\infty, -3] \cup [0, \infty[$.

10. Puoliympyrän sisään piirretään suorakulmainen kolmio kuvan osoittamalla tavalla. Määritä kateettien pituudet, kun kolmion ala on suurin mahdollinen. Puoliympyrän säde on r .



Ratkaisu:

Valitaan muuttujaksi x suoran kulman kärjen sijaintikohta x -akselilla. Tutkimus voidaan rajata välille $0 \leq x \leq r$, sillä jos $-r \leq x < 0$, kolmion ala on pienempi kuin ala arvolla $x = 0$. Pinta-alalle saadaan lauseke

$$A(x) = \frac{1}{2}(r+x)\sqrt{r^2-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(r+x)^2(r^2-x^2)}.$$

Pinta-ala saa suurimman arvonsa samalla muuttujan arvolla $0 \leq x \leq r$ kuin funktio

$$f(x) = (r+x)^2(r^2-x^2). \text{ Derivaatta } f'(x) = 2(r+x)(r^2-x^2) + (r+x)^2 \cdot (-2x)$$

sievenee muotoon $(r+x)^2(2r-4x)$, josta nähdään ainoa kysymykseen tuleva nollakohta $x = \frac{r}{2}$. Siinä pinta-ala saa suurimman arvon, sillä arvot $A(0)$ ja $A(r)$ ovat pie-

nempiä kuin $A(\frac{r}{2})$. Kysytyt kateettien pituudet ovat $\frac{3r}{2}$ ja $\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Kysytyt kateettien pituudet ovat } \frac{3r}{2} \text{ ja } \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8)

1. Ratkaise yhtälö.

a) $\sqrt{x+2} = x$ b) $\sqrt[3]{x} = 4x$

Ratkaisu:

a) $\sqrt{x+2} = x \mid ()^2 \Rightarrow x+2 = x^2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ tai } x = -1$. Vain $x = 2$ sopii.

b) $\sqrt[3]{x} = 4x \Leftrightarrow x = (4x)^3 \Leftrightarrow x(64x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = \pm \frac{1}{8}$

2. Ratkaise yhtälö.

a) $2^{1-x} \cdot 4^x = 8^x$ b) $e^{2x} - e^x = 6$

Ratkaisu:

a) Yhtälö $2^{1-x} \cdot 4^x = 8^x$ saadaan muotoon $2^{1-x} \cdot 2^{2x} = 2^{3x}$, josta edelleen $2^{1+x} = 2^{3x}$.
Yhtälö toteutuu, kun $1+x = 3x$ eli arvolla $x = \frac{1}{2}$.

b) Kirjoitetaan yhtälö $e^{2x} - e^x = 6$ muotoon $(e^x)^2 - e^x - 6 = 0$, josta $e^x = 3$ tai $e^x = -2$. Edellisestä ratkeaa $x = \ln 3$, jälkimmäisellä ei ole ratkaisua.

3. Ratkaise yhtälö.

a) $\lg(x-2) = 1$ b) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

Ratkaisu:

a) $\lg(x-2) = 1 \Leftrightarrow x-2 = 10$, josta $x = 12$.

b) Yhtälö $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$ on määritelty, kun $x > 2$. Aluksi saadaan esitys $\log_2 x(x-2) = 3$, josta $x(x-2) = 2^3$ ja edelleen $x^2 - 2x - 8 = 0$. Tämän yhtälön juurista 4 ja -2 vain edellinen sopii alkuperäisen yhtälön ratkaisuksi.

4. Derivoi.

a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ b) $x e^{2x}$ c) $\ln(e^x + 1)$

Ratkaisu:

a) $D \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = D(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

b) $D x e^{2x} = e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(2x+1)$ c) $D \ln(e^x + 1) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

5. Käyrälle $y = e^{-x}$ asetetaan tangentti käyrän ja y-akselin leikkauspisteeseen. Määritä tangentin yhtälö.*Ratkaisu:*

Käyrä $y = e^{-x}$ leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 1)$. Derivaatta $y' = -e^{-x}$ saa kohdassa $x = 0$ arvon -1 . Tangentin yhtälö on näin ollen $y - 1 = -1 \cdot (x - 0)$ eli $y = -x + 1$.

6. Osoita, että funktiolla $f(x) = e^x + \ln x - 5$ on vain yksi nollakohta.

Ratkaisu:

Funktio $f(x) = e^x + \ln x - 5$ on jatkuva ja derivoituva arvoilla $x > 0$. Koska $f(1) = e - 5 < 0$ ja $f(2) = e^2 + \ln 2 - 5 > 0$, funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä $]1, 2[$. Derivaatta $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$, joten funktio on aidosti kasvava. Näistä seuraa, että funktiolla on vain yksi nollakohta.

7. Olkoon $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ja $g(x) = 8x^3 + 1$. Muodosta funktio $f \circ g$ ja ratkaise epäyhtälö $(f \circ g)(x) < 2x + 1$.

Ratkaisu:

Funktiot $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ja $g(x) = 8x^3 + 1$ ovat määritellyt koko \mathbf{R} :ssä. Yhdistetty funktio $f \circ g$ on $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{8x^3 + 1}$.

Epäyhtälö $\sqrt[3]{8x^3 + 1} < 2x + 1$ saadaan kolmanteen potenssiin korottamalla muotoon $8x^3 + 1 < 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ eli $12x^2 + 6x > 0$. Ratkaisu on $x < -\frac{1}{2}$ tai $x > 0$.

8. Osoita, että funktiolla $f(x) = 2^x + 1$ on käänteisfunktio f^{-1} . Muodosta tämä käänteisfunktio ja määritä $(f^{-1})'(9)$.

Ratkaisu:

Funktio $f(x) = 2^x + 1$ on määritelty koko \mathbf{R} :ssä. Sen derivaatta $f'(x) = 2^x \ln 2$ on kaikkialla positiivinen, joten funktio f on aidosti kasvava. Tästä syystä käänteisfunktio f^{-1} on olemassa.

Muodostetaan käänteisfunktio vaihtamalla ensin yhtälössä $y = 2^x + 1$ merkinnät x ja y , jolloin saadaan $x = 2^y + 1$ ja siitä $y = f^{-1}(x) = \log_2(x - 1)$, $x > 1$.

Koska $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(x-1)\ln 2}$, niin $(f^{-1})'(9) = \frac{1}{8\ln 2}$.

Toinen ratkaisutapa:

Tiedetään, että $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, kun x ja y ovat toisiaan vastaavia argumentin ja

funktion arvoja. Nyt $y = 2^x + 1$, ja kun $y = 9$, huomataan x :n arvoksi 3. Silloin

$$(f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{2^3 \ln 2} = \frac{1}{8\ln 2}.$$

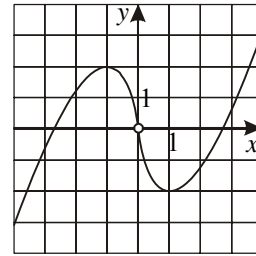
9. Määritä funktion $f(x) = x(\ln x^2 - 2)$ nollakohdat ja ääriarvot. Piirrä funktion f kuvaaja.

Ratkaisu:

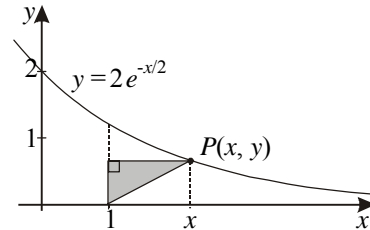
Funktio $f(x) = x(\ln x^2 - 2)$ on määritelty, kun $x \neq 0$. Nollakohdat ratkeavat yhtälöstä $\ln x^2 = 2$, josta $x^2 = e^2$ ja edelleen $x = \pm e$.

Derivaatan $f'(x) = \ln x^2$ nollakohdat ovat $x = \pm 1$, ja merkkitarkastelu johtaa siihen päätelmään, että funktiolla on maksimi $f(-1) = 2$ ja minimi $f(1) = -2$.

Ohessa on funktion $f(x) = x(\ln x^2 - 2)$ kuvaaja.



10. Määritä se käyrän $y = 2e^{-x/2}$ piste $P(x, y)$, $x > 1$, johon liittyy pinta-alaltaan suurin mahdollinen oheisen kuvan mukainen kolmio.



Ratkaisu:

Kuvan mukaisen kolmion pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2}(x-1) \cdot 2e^{-x/2} = (x-1)e^{-x/2}, \quad x > 1. \text{ Derivaatan } A'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}(3-x) \text{ ainoa}$$

nollakohta $x = 3$ on paikallisen maksimin ja samalla absoluuttisen maksimin kohta.

Käyrän piste $P(x, y)$ on silloin $(3, 2e^{-1,5}) \approx (3; 0,45)$.

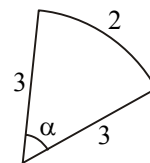
Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9)

1. Laske ympyrän sektorin keskuskulma ja ala, kun ympyrän säteen pituus on 3 ja kaaren pituus 2.

Ratkaisu:

Keskuskulman suuruus on $\frac{2}{3}$ rad $\approx 38,2^\circ$. Sektorin ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ pinta-alayksikköä.}$$



2. Ratkaise yhtälö.

a) $\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$

b) $\tan 3x = \sqrt{3}$

c) $\cos 2x - \cos 3x = 0$

Ratkaisu:

a) $\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + n2\pi \text{ tai } \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + n2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + n4\pi \text{ tai } x = \frac{5\pi}{3} + n4\pi$

b) $\tan 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + n\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + n\frac{\pi}{3}$

c) $\cos 2x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 3x \Leftrightarrow 2x = \pm 3x + n2\pi \Leftrightarrow x = n2\pi \text{ tai } x = n\frac{2\pi}{5}$

$$\Leftrightarrow x = n\frac{2\pi}{5}$$

3. Määritä funktion $f(x) = \cos 3x - 3 \cos x + 3$ derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu:

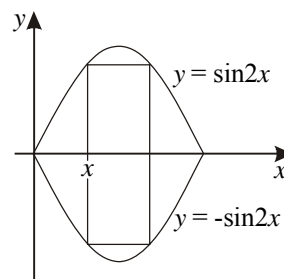
Funktion $f(x) = \cos 3x - 3 \cos x + 3$ derivaatta on $f'(x) = -3 \sin 3x + 3 \sin x$. Derivaatta on nolla, kun $\sin 3x = \sin x$, josta $3x = x + n2\pi$ tai $3x = \pi - x + n2\pi$ ja edelleen $x = n\pi$ tai $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$.

4. Johda käyrälle $y = \tan \frac{x}{2}$ kohtaan $\frac{\pi}{2}$ piirretyn tangentin yhtälö.

Ratkaisu:

Kun $y = \tan \frac{x}{2}$, niin $y(\frac{\pi}{2}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$. Derivaatta on $y' = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{x}{2})$ ja $y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}) = 1$. Tangentin yhtälö on $y - 1 = 1 \cdot (x - \frac{\pi}{2})$ eli $y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$.

5. Käyrien $y = \sin 2x$ ja $y = -\sin 2x$ väliin piirretään suorakulmio oheisen kuvan mukaisesti. Määritä se muuttujan x arvo, jolla suorakulmion piiri on pisin mahdollinen.



Ratkaisu:

Muuttuja x voidaan rajata välille $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Suorakulmion piiri on symmetriaa soveltamalla $p(x) = 4 \sin 2x + 4(\frac{\pi}{4} - x) = 4 \sin 2x - 4x + \pi$. Derivaatta

$p'(x) = 8 \cos 2x - 4$ on nolla, kun $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Tarkasteluvälin arvoista tähän sopii

vain $x = \frac{\pi}{6}$. Silloin piiri on $p(\frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \approx 4,5$. Se on suurin arvo, koska päätepistearvot $p(0) = \pi$ ja $p(\frac{\pi}{4}) = 4$ ovat sitä pienempiä. Etsitty arvo on siis $x = \frac{\pi}{6}$.

6. Muodosta derivaattajonon $a_n(x) = f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, kymmenes jäsen $a_{10}(x)$, kun $f(x) = \sin \pi x$.

Ratkaisu:

Jonossa $a_n(x) = f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbf{Z}_+$, funktiona on $f(x) = \sin \pi x$. Muodostetaan jonon jäseniä eli funktion derivaattoja ensimmäisestä kertaluvusta alkaen:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= f'(x) = \pi \cos \pi x & a_2(x) &= f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x \\ a_3(x) &= f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x & a_4(x) &= f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x \dots \end{aligned}$$

Samat trigonometriset funktiot alkavat toistua. Voidaan päätellä induktiivisesti, että $a_{10}(x) = f^{(10)}(x) = -\pi^{10} \sin \pi x$.

7. Määritä luvut x , ja y niin, että lukujono $125, x, y, 8, \dots$ on geometrinen. Mikä on tämän jonon kymmenes jäsen?

Ratkaisu:

Lukujono $125, x, y, 8, \dots$ on geometrinen, jos $\frac{x}{125} = \frac{y}{x} = \frac{8}{y}$. Näistä saadaan

$x^2 = 125y$ ja $xy = 1000$. Kun jälkimmäisestä saatu $y = \frac{1000}{x}$ sijoitetaan edelliseen,

tulee $x^2 = 125 \cdot \frac{1000}{x}$ eli $x^3 = 125 \cdot 1000$. Tästä $x = 50$, jolloin $y = 20$.

Jonon suhdeluku on $q = \frac{20}{50} = 0,4$. Kymmenes jäsen on $a_{10} = a_1 q^9 = 125 \cdot 0,4^9 = 0,032768$.

8. Annettu jono on joko aritmeettinen tai geometrinen. Laske sen jäsenten summa.
a) $5, 10, 15, \dots, 1200$ b) $18, 11, 4, \dots, -80$ c) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \dots, \sqrt{768}$

Ratkaisu:

a) Lukujono $5, 10, 15, \dots, 1200$ on aritmeettinen ja sen differenssi on $d = 5$. Viimeiselle jäsenelle pätee $1200 = 5 + (n-1) \cdot 5$, josta $n = 240$. Jonon jäsenten summa on

$$S_{240} = 240 \cdot \frac{5 + 1200}{2} = 144\,600.$$

b) Jono $18, 11, 4, \dots, -80$ on aritmeettinen ja sen differenssi on $d = -7$. Yhtälöstä $-80 = 18 + (n-1) \cdot (-7)$ ratkeaa $n = 15$. Jonon jäsenten summa on

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{18 + (-80)}{2} = -465.$$

c) Jono $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \dots, \sqrt{768}$ on geometrinen. Sen suhdeluku on $q = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$.

Viimeisen jäsenen yhtälöstä $\sqrt{768} = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$ ratkeaa $n = 9$. Jonon jäsenten

summa on $S_9 = \frac{\sqrt{3}(1 - (\sqrt{2})^9)}{1 - \sqrt{2}} = 31\sqrt{3} + 15\sqrt{6}$.

9. Määritä lukujonon $a_n = \sqrt{n} - \ln n$, $n \in \mathbf{Z}_+$, pienin luku.

Ratkaisu:

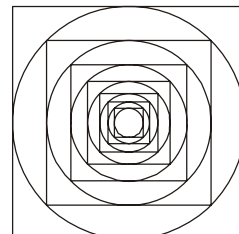
Liitetään lukujonoon $a_n = \sqrt{n} - \ln n$ funktio $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$, $x > 0$. Derivaatan

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$ nollakohta $x = 4$ osoittautuu absoluuttisen minimin kohdaksi.

Funktion pienin arvo on siis $f(4) = 2 - \ln 4$, ja se on samalla lukujonon

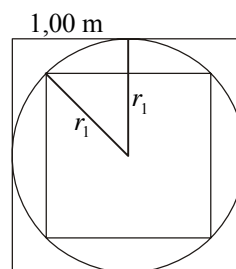
$a_n = \sqrt{n} - \ln n$ pienin luku.

10. Oheisessa kuvassa uloimman neliön piiri on $p_1 = 8,00$ m. Seuraavan neliön piiri on p_2 jne. Kuinka pitkä on piiri p_{11} ?



Ratkaisu:

Koska uloimman neliön piiri on $p_1 = 8,00$ m, niin suurimman ympyrän säde on $r_1 = 1,00$ m. Silloin toiseksi suurimman neliön piiri on $p_2 = 4\sqrt{2} \cdot 1,00$ m = $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8,00$ m = $\frac{\sqrt{2}}{2} p_1$. Neliöiden piirien pituudet lyhenevät samassa suhteessa ja muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku on $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Sen tiedon perusteella on piirin pituus $p_{11} = p_1 q^{10} = 8,00$ m $\cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10} = 0,25$ m = 25 cm.



Integraalilaskenta (MAA10)

1. Määritä.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (2x-3) dx & \text{b)} \int (2x-3)^3 dx & \text{c)} \int \frac{dx}{2x-3} \\ \text{d)} \int \frac{dx}{(2x-3)^3} & \text{e)} \int \sqrt{2x-3} dx & \text{f)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} \end{array}$$

Ratkaisu:

$$\text{a)} \int (2x-3) dx = x^2 - 3x + C$$

$$\text{b)} \int (2x-3)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2(2x-3)^3 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} (2x-3)^4 + C = \frac{1}{8} (2x-3)^4 + C$$

$$\text{c)} \int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

$$\text{d)} \int \frac{dx}{(2x-3)^3} = \frac{1}{2} \int 2(2x-3)^{-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} (2x-3)^{-2} + C = -\frac{1}{4(2x-3)^2} + C$$

$$\text{e)} \int \sqrt{2x-3} dx = \frac{1}{2} \int 2(2x-3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\frac{3}{2}} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2x-3)\sqrt{2x-3} + C$$

$$\text{f)} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{2} \int 2(2x-3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2(2x-3)^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x-3} + C$$

2. Määritä **a)** $\int_0^{\pi/2} \cos 3x dx$, **b)** $\int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$, **c)** k , kun $\int_1^k \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1$.

Ratkaisu:

$$\text{a)} \int_0^{\pi/2} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin 3x = \frac{1}{3} (-1 - 0) = -\frac{1}{3}$$

$$\text{b)} \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} dx - 2 \int_0^2 e^{-\frac{x}{2}} = -2(e^{-1} - 1) = 2 - \frac{2}{e}$$

$$\text{c)} \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \int_1^k \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{k} - 2 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

3. Johda yhtälö pisteen (2, 4) kautta kulkevalle käyrälle, jonka tangentin kulmakerto on jokaisessa kohdassa $x > -7$ on $\frac{1}{\sqrt{x+7}}$.

Ratkaisu:

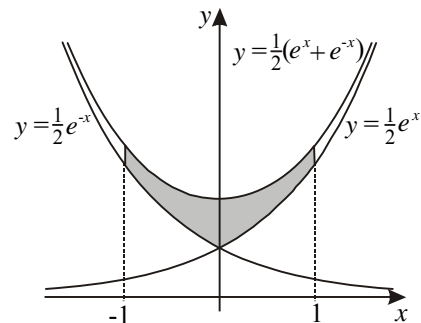
Kun merkitään $y = f(x)$, niin $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+7}}$, $x > -7$. Silloin $f(x) = 2\sqrt{x+7} + C$, jossa C :n arvo -2 määräytyy ehdosta $f(2) = 4$. Haettu käyrän yhtälö on siis $y = 2\sqrt{x+7} - 2$.

4. Laske käyrien $y = x^2 + 2x - 1$ ja $x - y + 1 = 0$ rajaaman alueen ala.

Ratkaisu:

Käyrien $y = x^2 + 2x - 1$ ja $x - y + 1 = 0$ leikkauskohdat ovat $x = -2$ ja $x = 1$. Ala on $\int_{-2}^1 (x+1 - x^2 - 2x + 1) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = 4\frac{1}{2}$.

5. Oheiseen kuvaan korostettua aluetta rajaavat yläpuolelta ketjukäyrä $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ja alapuolelta käyrät $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ja $y = \frac{1}{2}e^x$. Laske alueen pinta-ala. Tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.

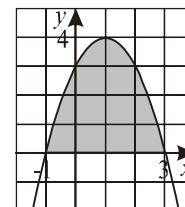


Ratkaisu:

Käyrän $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ yhtälöstä käy ilmi, että käyrä on symmetrinen y -akselin suhteen. Toisaalta käyrät $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ja $y = \frac{1}{2}e^x$ saadaan toisistaan peilaamalla y -akselin suhteen. Käyttämällä symmetriaa hyväksi saadaan korostetun alueen alaksi

$$A = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}e^x \right) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632.$$

6. Funktion kuvaajan ja x -akselin rajaaman alueen pinta-ala oheisessa kuvassa on $10\frac{2}{3}$. Laske funktion keskiarvo välillä $[-1, 3]$.



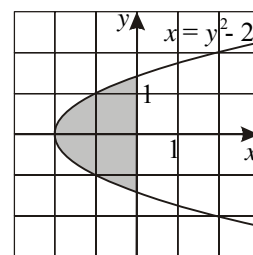
Ratkaisu: Funktion keskiarvo välillä $[-1, 3]$ on $\frac{10\frac{2}{3}}{3 - (-1)} = 2\frac{2}{3}$.

7. Käyrän $x = y^2 - 2$ ja y -akselin rajaama alue pyörrähtää x -akselin ympäri. Laske syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu:

Kun kuvaan korostettu alue pyörrähtää x -akselin ympäri, syntyy pyörrähdyskappale, jonka tilavuus on

$$V = \pi \int_{-2}^0 (x+2) dx = \pi \left/ \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \right|_{-2}^0 = 2\pi.$$

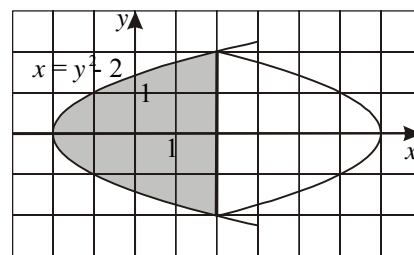


8. Käyrien $x = y^2 - 2$ ja $x = 2$ rajaama alue pyörrähtää suoran $x = 2$ ympäri. Laske syntyvän pyörrähdyskappaleen tilavuus.

Ratkaisu:

Kun kuvaan korostettu alue pyörrähtää suoran $x = 2$ ympäri, syntyy pyörrähdyskappale, jonka tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-2}^2 (2 - (y^2 - 2))^2 dy \\ &= 2\pi \int_{-2}^2 (y^4 - 8y^2 + 16) dy \\ &= 2\pi \left/ \left(\frac{1}{5}y^5 - \frac{8}{3}y^3 + 16y \right) \right|_{-2}^2 = \frac{512\pi}{15}. \end{aligned}$$



9. Kun hyönteispopulaation kasvua tutkittiin kokeellisesti, havaittiin sen kasvunopeudeksi t :n viikon kuluttua $\frac{3000}{\sqrt{t}}$. Kuinka paljon populaatio lisääntyy aikavälillä $9 \leq t \leq 25$, jos kasvunopeus säilyy?

Ratkaisu:

Integroimalla kasvunopeus $f(t) = \frac{3000}{\sqrt{t}}$ saadaan selville kasvun määrä. Aikavälillä

$$9 \leq t \leq 25 \text{ tapahtuva populaation kasvu on } \int_9^{25} \frac{3000}{\sqrt{t}} dt = \left/ \frac{6000\sqrt{t}}{1} \right|_9^{25} = 12000 \text{ yksilöä.}$$

10. Piirrä graafisen laskimen avulla funktion $f(x) = \ln(x^2 + x)$, $x > 0$, ja sen derivaattafunktion f' kuvaajat samaan koordinaatistoon. Laske sitten laskimen integraalitoiminnolla sen alueen ala, jota rajaavat käyrät $y = f(x)$, $y = f'(x)$ ja $x = 6$. Ilmoita saamasi tulos kahden desimaalin tarkkuudella.

Ratkaisu:

Oheisessa kuvassa ovat funktion $f(x) = \ln(x^2 + x)$, $x > 0$, ja sen derivaattafunktion $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$ kuvaajat sekä alue, jota rajaavat käyrät $y = f(x)$, $y = f'(x)$ ja $x = 6$. Alan likiarvo on 10,08.

