1. Polynomifunktion nollakohdat

173. Suoritetaan jakolasku $\dfrac{2x^6-3x^3+1}{x-1}$ jakokulmassa

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{11}{8}x^2-\frac{11}{16}x-\frac{11}{32} \\
2x-1\,\big)\; 2x^6+0x^5+0x^4-3x^3+0x^2+0x+1 \\
\underline{\mp 2x^6 \pm x^5} \\
\qquad x^5 \\
\qquad \underline{\mp x^5 \pm \frac{1}{2}x^4} \\
\qquad\qquad \frac{1}{2}x^4 \quad -3x^3 \\
\qquad\qquad \underline{\mp\frac{1}{2}x^4 \pm \frac{1}{4}x^3} \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{11}{4}x^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm\frac{11}{4}x^3 \mp \frac{11}{8}x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{11}{8}x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\pm\frac{11}{8}x^2 \mp \frac{11}{16}x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{11}{16}x \;+\; 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\pm\frac{11}{16}x^2 \mp \frac{11}{32}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{21}{32}
\end{array}
$$

<u>Vastaus</u>: Vastaus jakoyhtälönä on

$$2x^6-3x^3+1=(2x-1)\left(x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{11}{8}x^2-\frac{11}{16}x-\frac{11}{32}\right)-\frac{21}{32}.$$

174. Jaetaan polynomi $5x^3-2x^2-3$ binomilla $x+3$.

$$\begin{array}{r|l} & 5x^2-17x+51 \\ \hline x+3 & 5x^3-\ \ 2x^2+0x-3 \end{array}$$

$$\underline{\mp 5x^3 \mp 15x^2}$$

$$-17x^2$$

$$\underline{\pm 17x^2 \pm 51x}$$

$$51x\ -\ \ 3$$

$$\underline{\pm 51x^2 \mp 153}$$

$$-156$$

<u>Vastaus</u>: Jakojäännös on −156.

175. Jaetaan polynomi x^4-2x^3-4 binomilla $2x-1$.

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x-\frac{3}{16} \\ \hline 2x-1 & x^4-\ \ 2x^3+0x^2+0x-4 \end{array}$$

$$\underline{\mp x^4 \pm \frac{1}{2}x^3}$$

$$-\frac{3}{2}x^3$$

$$\underline{\pm \frac{3}{2}x^3 \mp \frac{3}{4}x^2}$$

$$-\frac{3}{4}x^2$$

$$\underline{\pm \frac{3}{4}x^2 \mp \frac{3}{8}x}$$

$$-\frac{3}{8}x-4$$

$$\underline{\pm \frac{3}{8}x \mp \frac{3}{16}}$$

$$-4\frac{3}{16}$$

<u>Vastaus</u>: Jakojäännös on $-4\frac{3}{16}$.

176. Polynomin $f(x)=x^4-2x^2+1$ jako tekijöihin

$f(x)=x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=\left[(x-1)(x+1)\right]^2=(x-1)^2(x+1)^2$

Polynomin nollakohdat

$$f(x)=0$$
$$(x-1)^2(x+1)^2=0$$
$$x-1=0 \quad \text{tai} \quad x+1=0$$
$$x=1 \qquad\qquad x=-1$$

Vastaus: Polynomin nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 1$. Polynomin jako tekijöihin on $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$.

177. Polynomi $f(x)=2x^3+3x^2-4x-6$

Nollakohdat

$$f(x)=0$$
$$2x^3+3x^2-4x-6=0$$

Määritetään mahdolliset rationaalijuuret

Luvun $a_0=-6$ kaikki tekijät: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$

Luvun $a_n = 2$ kaikki tekijät: $\pm1,\pm2$

Mahdolliset rationaalijuuret $\frac{b_0}{b_n}$ sievennettynä $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2}$

Kokeillaan

$x=1$: $\quad 2\cdot1^3+3\cdot1^2-4\cdot1-6=2+3-4-6=-5\neq0$

$x=-\frac{3}{2}$: $\quad 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-6=-\frac{27}{4}+\frac{27}{4}+6-6=0$

Koska $x=-\frac{3}{2}$ toteuttaa yhtälön, niin se on yhtälön juuri ja polynomi $2x^3-x^2-7x+6$ on jaollinen binomilla $x+\frac{3}{2}$, joka voidaan saattaa muotoon $2x+3$. Suoritetaan jakolasku jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad -2 \\
\hline
2x+3 & 2x^3+3x^2-4x-6 \\
 & \underline{\mp2x^3\mp3x^2} \\
 & \qquad\qquad -4x-6 \\
 & \qquad\qquad \underline{\pm2x\pm6} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Yhtälön ratkaisu eli polynomin nollakohdat

$$2x^3+3x^2-4x-6=0$$
$$(2x+3)(x^2-2)=0$$
$$2x+3=0 \quad \text{tai} \quad x^2-2=0$$
$$x=-\frac{3}{2} \qquad x^2=2 \quad \Big|\sqrt{\ }$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$
Vastaus: Polynomin jako tekijöihin on $f(x)=(2x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

2. Jatkuvuuslauseita

178. Funktio $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ on jatkuva välillä $-1 \le x \le 1$ ja derivoituva välillä $-1 < x < 1$.
Suljetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tällä välillä. Koska funktio f on derivoituva, suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

1° Välin päätepisteet
Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ arvot välin päätepisteissä.
$f(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + 2 = -3$
$f(1) = 2\cdot1^3 - 3\cdot1^2 + 2 = 1$

2° Derivaatan nollakohdat
Funktio $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$
Derivaatta $f'(x) = 6x^2 - 6x$
Derivaatan nollakohdat
$$f'(x) = 0$$
$$6x^2 - 6x = 0$$
$$6x(x-1) = 0$$
$$6x = 0 \quad \text{tai} \quad x-1=0$$
$$x = 0 \qquad x = 1$$
Välin päätepiste
Funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ arvot derivaatan nollakohdissa
$f(0) = 2\cdot0^3 - 3\cdot0^2 + 2 = 2$

Vastaus: Funktion suurin arvo välillä $-1 \le x \le 1$ on 2 ja pienin -3.

179. Funktio $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$, $x \neq -1$, on jatkuva välillä [0, 5] ja derivoituva välillä $]0,5[$.
Suljetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tällä välillä. Koska funktio f on derivoituva, suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

1° Välin päätepisteet

Funktion $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ arvot välin päätepisteissä

$f(0)=\dfrac{0^2+3}{0+1}=3$

$f(5)=\dfrac{5^2+3}{5+1}=4\dfrac{2}{3}$

2° Derivaatan nollakohdat

Funktio $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

Derivaatta $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=0$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3 \quad \text{|Ei Käy}$$

$$x_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$$

Funktion $f(x)$ = $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ arvo derivaatan nollakohdassa $f(1)=\dfrac{1^2+3}{1+1}=2$

<u>Vastaus</u>: Funktion suurin arvo välillä [0,5] on $4\dfrac{2}{3}$ ja pienin 2.

180. Funktio $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$

Derivaatta $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x+1)-(x+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$

Tutkitaan funktiota $g(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$ .Funktio $g(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}$ on jatkuva välillä [0, 9] ja derivoituva välillä $]0,9[$. Nimittäjän nollakohta on $x = -1$.

Suljetulla välillä jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tällä välillä. Koska funktio *f* on derivoituva, suurin ja pienin arvo sijaitsevat joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

1° Välin päätepisteet

Funktion $g(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}$ arvot välin päätepisteissä

$g(0)=\frac{-2}{(0+1)^2}=-2$

$g(9)=\frac{-2}{(9+1)^2}=-\frac{1}{50}$

2° Derivaatan nollakohdat

Funktio $g(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}=-2(x+1)^{-2}$

Derivaatta $g'(x) = -2\cdot 1\cdot(-2)(x+1)^{-3}=\frac{4}{(x+1)^3}$

Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4}{(x+1)^3}=0$$

$$4=0$$

Ei nollakohtia

Vastaus: Funktion derivaatan suurin arvo välillä [0,9] on $-\frac{1}{50}$ ja pienin –2.

181. a)Yhtälö $\tan 3x = 3x + 1$

$\tan 3x - 3x - 1 = 0$

Tutkitaan funktiota $f(x) = \tan 3x - 3x - 1$, $3x\neq\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$ eli $x\neq\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{\pi}{3}$

Funktiolla on välillä [0,1] kohta $x=\frac{\pi}{6}\approx 0{,}5235987756$, jossa sitä ei ole määritelty.

Derivaatta $f'(x) = \frac{3}{\cos^2 3x}-3 \geq 0$, joten funktio $f(x)$ on kasvava.

$f(0) = \tan 0 - 3\cdot 0 - 1 = -1 < 0$

$f(0{,}5) = \tan(3\cdot 0{,}5) - 3\cdot 0{,}5 - 1 = 11{,}6\ldots > 0$

Koska funktio on jatkuva ja funktion arvot välin [0; 0,5] päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on nollakohta välillä]0; 0,5[. Tämä väli sisältyy väliin [0,1], joten yhtälöllä on ratkaisu välillä [0,1].

b) Yhtälö $\ln 3x = e^{3x} - 100$

$\ln 3x - e^{3x} + 100 = 0$

Tutkitaan funktiota $f(x) = \ln 3x - e^{3x} + 100$

Funktio on jatkuva ja derivoituva, kun $x > 0$.

Derivaatta $f'(x) = \frac{3}{3x}-3e^{3x}=\frac{1}{x}-3e^{3x}$

Derivaatan nollakohdat

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{x} - 3e^{3x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = 3e^{3x} \quad \big| \cdot x$$

$$3xe^{3x} = 1$$

$$3xe^{3x} - 1 = 0$$

Nollakohtien ratkaisu ei onnistu analyyttisesti.

1° Koska $f'(0{,}001) = \frac{1}{0{,}001} - 3e^{3\cdot 0{,}001} = 1000 - 3e^{0{,}003} > 0$ ja $f'(1) = \frac{1}{1} - 3e^{3\cdot 1} = 1 - 3e^{3} < 0$,

derivaatalla on välillä $]0,1[$ ainakin yksi nollakohta.

2° Tutkitaan derivaattafunktion $f'(x) = \frac{1}{x} - 3e^{3x} = x^{-1} - 3e^{3x}$ kulkua.

Derivaatan derivaatta $f''(x) = -x^{-2} - 3\cdot 3e^{3x} = -\frac{1}{x^2} - 9e^{3x} < 0$,

sillä $x^2 > 0$ ja $e^{3x} > 0$, kun $x > 0$.

Täten derivaatta $f'(x)$ on aidosti vähenevä, joten sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä $]0,1[$.

Kohtien 1° ja 2° perusteella derivaatalla on täsmälleen yksi nollakohta välillä $]0,1[$. Koska derivaatta saa aluksi positiivisia arvoja ja sitten negatiivisia arvoja, on itse funktio aluksi kasvava ja sitten vähenevä.

Lasketaan funktion arvoja

$$f\left(\frac{1}{3}\cdot 10^{-1000}\right) = \ln\left(3\cdot\frac{1}{3}\cdot 10^{-1000}\right) - e^{3\cdot\frac{1}{3}\cdot 10^{-1000}} + 100 = \ln 10^{-1000} - e^{10^{-1000}} + 100$$

$$= -1000\ln 10 - e^{10^{-1000}} + 100 \approx -2\,202 < 0$$

$f(1) = \ln 3\cdot 1 - e^{3}\cdot 1 + 100 \approx 81 > 0$

Koska funktio on jatkuva ja funktion arvot välin $\left[\frac{1}{3}\cdot 10^{-1000}, 1\right]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on nollakohta välillä $\left]\frac{1}{3}\cdot 10^{-1000}, 1\right[$. Tämä väli sisältyy väliin [0,1], joten yhtälöllä on ratkaisu välillä [0,1].

<u>Vastaus</u>: Yhtälöllä a) on juuri b) on juuri välillä [0,1].

182. Osoitetaan, että funktiolla $f(x) = x - \ln x - 2$ on ainakin yksi nollakohta.

1° Funktio $f(x) = x - \ln x - 2$ on jatkuva, kun $x > 0$.

$f(1) = 1 - \ln 1 - 2 = -3 < 0$

$f(10) = 10 - \ln 10 - 2 \approx 5{,}69 > 0$

Koska funktion arvot välin [1;5,69] päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on Bolzanon lauseen perusteella välillä $]1; 5{,}69[$ ainakin yksi nollakohta. □

183. Osoitetaan, että funktiolla $f(x) = 5x^3 + x + 8$ on täsmälleen yksi nollakohta.
1° Funktio $f(x) = 5x^3 + x + 8$ on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla.
$f(0) = 5\cdot 0^3 + 0^2 + 8 = 8 > 0$
$f(-2) = 5\cdot(-2)^3 + (-2)^2 + 8 = -28 < 0$
Koska funktion arvot välin $[-2,0]$ päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on Bolzanon lauseen perusteella välillä $]-2,0[$ ainakin yksi nollakohta.

2° Funktio $f(x) = 5x^3 + x + 8$ on polynomifunktiona derivoituva kaikkialla
Derivaatta $f'(x) = 15x^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0$
Funktio on aidosti kasvava, joten funktiolla $f(x) = x^3 + 10x + 8$ on korkeintaan yksi nollakohta.

Kohdista 1° ja 2° seuraa, että funktiolla $f(x) = 5x^3 + x + 8$ on täsmälleen yksi nollakohta. $\square$

3. Absoluuttinen ja suhteellinen virhe

184. Lukujen a ja b likiarvojen $a \approx 3{,}21$ ja $b \approx 2{,}789$ summan ja erotuksen osamäärä

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{3{,}21 + 2{,}789}{3{,}21 - 2{,}789} = 14{,}249... \approx 14{,}2$$

Vastaus: Lukujen summan ja erotuksen osamäärä on 14,2.

185. Luvun $x = \frac{7}{400}$ asemasta käytetään likiarvoa $x \approx 0{,}02$.

a) Luvun x suhteellinen virhe $\left|\dfrac{\frac{7}{400} - 0{,}02}{\frac{7}{400}}\right| = 0{,}142... \approx 14\,\%$

b) Lausekkeen $\dfrac{x}{x-1}$ suhteellinen virhe $\left|\dfrac{\dfrac{\frac{7}{400}}{\frac{7}{400}-1} - \dfrac{0{,}02}{0{,}02-1}}{\dfrac{\frac{7}{400}}{\frac{7}{400}-1}}\right| = 0{,}1457... \approx 15\,\%$

Vastaus: Suhteellinen virhe on a) 14 % b) 15 %.

186. Määritä tulon *ab* suhteellinen virhe, kun
Luvut $a = 1{,}4 \pm 0{,}1$ ja $b = 0{,}7 \pm 0{,}2$
Tulon *ab* suhteellinen virhe $\left|\frac{\Delta(ab)}{ab}\right| \le \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| \le \frac{0{,}1}{1{,}4} + \frac{0{,}2}{0{,}7} \le 0{,}3571... < 36\%$
Vastaus: Tulon *ab* suhteellinen virhe 36 %.

4. Funktion nollakohtien ratkaiseminen numeerisesti

187. Funktion $f(x) = \ln x + 5x - 10$ nollakohta puolitusmenetelmällä

x	$f(x)$	Nollakohta välillä
1,00000	−5,00000	
2,00000	0,69315	$]1,2[$
1,50000	−2,09453	$]1{,}5;2[$
1,75000	−0,69038	$]1{,}75;2[$
1,87500	0,00361	$]1{,}75;1{,}875[$
1,81250	−0,34279	$]1{,}8125;1{,}875[$
1,84375	−0,16945	$]1{,}84375;1{,}875[$
1,85938	−0,08288	$]1{,}85938;1{,}875[$
1,86719	−0,03963	$]1{,}86719;1{,}875[$

Nollakohta on välillä $]1{,}86719;1{,}875[$, joten kahden desimaalin tarkkuudella se on $x_1 = 1{,}87$.
Vastaus: Nollakohta on 1,87.

188. Yhtälö

$$\sqrt{x^2 - x} = x^2$$
$$\sqrt{x^2 - x} - x^2 = 0$$

Tutkitaan funktiota $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x^2$
Funktion yksi nollakohta on $x = 0$.
Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x^2$ nollakohta sekanttimenetelmää käyttäen.
Uusi välin päätepiste $c = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a)$

a	b	c	$f(a)$	$f(b)$
−2,00000000	−1,00000000	−1,21082534	−1,55051026	0,41421356
−1,00000000	−1,21082534	−1,35763113	0,41421356	0,17003260
−1,21082534	−1,35763113	−1,32220277	0,17003260	−0,05408616
−1,35763113	−1,32220277	−1,32466636	−0,05408616	0,00404207
−1,32220277	−1,32466636	−1,32471804	0,00404207	0,00008306
−1,32466636	−1,32471804	−1,32471796	0,00008306	−0,00000013
−1,32471804	−1,32471796	−1,32471796	−0,00000013	0,00000000

Nollakohta on välillä $]-1,32471804;-1,32471796[$, joten viiden desimaalin tarkkuudella se on $x_1 = -1,32472$.
Vastaus: Yhtälön ratkaisu on −1,32472.

189. a) Funktio $f(x) = x^2 - 5x$
Kiintopisteet $f(x) = x$

$$x^2 - 5x = x$$
$$x^2 - 6x = 0$$
$$x(x - 6) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 6$$

b) Funktio $g(x) = x^3$
Kiintopisteet $g(x) = x$

$$x^3 = x$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

Vastaus: Funktion kiintopisteet ovat a) 0 ja 6 b) −1, 0 ja 1.

190. Funktio $f(x) = e^x - x - 3$
Kiintopisteet $f(x) = 0$

$$e^x - x - 3 = 0$$
$$x = e^x - 3$$

Iterointifunktio $g(x) = e^x - 3$
Alkuarvo $x_0 = -4$
Nollakohta kiintopistemenetelmällä

n	x_n	$f(x_n)$
0	−4,00000000	−2,98168436
1	−2,98168436	−2,94929265
2	−2,94929265	−2,94762326
3	−2,94762326	−2,94753575
4	−2,94753575	−2,94753116
5	−2,94753116	−2,94753092
6	−2,94753092	−2,94753090
7	−2,94753090	−2,94753090

Likiarvojen jono suppenee kohti lukua −2,94753090, joten kuuden desimaalin tarkkuudella se on $x_1 = -2,947531$.

Vastaus: Nollakohta on −2,947531.

191. Funktio $f(x) = \sqrt{x-2} - \ln x = (x-2)^{\frac{1}{2}} - \ln x$

Derivaatta $f'(x) = 1 \cdot \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{x}$

Newtonin menetelmän iteroimiskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n - 2} - \ln x_n}{\frac{1}{2\sqrt{x_n-2}} - \frac{1}{x_n}}$$

Alkuarvo $x_0 = 3$

Nollakohta Newtonin menetelmällä

n	x_n	x_{n+1}
0	3,00000000	3,59167373
1	3,59167373	3,73589286
2	3,73589286	3,73995259
3	3,73995259	3,73995536
4	3,73995536	3,73995536

Likiarvojen jono suppenee kohti lukua 3,73995536, joten viiden desimaalin tarkkuudella se on $x_1 = 3{,}73996$.

Vastaus: Nollakohta on 3,73996.

192. Yhtälö $x^7 = x^2 + 2$

$x^7 - x^2 - 2 = 0$

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^7 - x^2 - 2$

Derivaatta $f'(x) = 7x^6 - 2x$

Newtonin menetelmän iteroimiskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^7 - x_n^2 - 2}{7x_n^6 - 2x_n}$$

Alkuarvo $x_0 = 1$

Nollakohta Newtonin menetelmällä

n	x_n	x_{n+1}
0	1,00000000	1,40000000
1	1,40000000	1,26812705
2	1,26812705	1,20544457
3	1,20544457	1,19257138
4	1,19257138	1,19209053
5	1,19209053	1,19208988
6	1,19208988	1,19208988

Likiarvojen jono suppenee kohti lukua 1,19208988, joten kuuden desimaalin tarkkuudella se on x_1 =1,192090.
Vastaus: Yhtälön juuri on 1,192090.

193. Luku $x = \sqrt[3]{4}$ on yhtälön $x^3 = 4$ eli $x^3 - 4 = 0$ ratkaisu.
Funktio $f(x) = x^3 - 4$
Derivaatta $f\,'(x) = 3x^2$
Newtonin menetelmän iteroimiskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f\,'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 4}{3x_n^2}$$

Nollakohta Newtonin menetelmällä
Alkuarvo $x_0 = 2$

n	x_n	x_{n+1}
0	1,000000000	2,000000000
1	2,000000000	1,666666667
2	1,666666667	1,591111111
3	1,591111111	1,587409696
4	1,587409696	1,587401052
5	1,587401052	1,587401052

Likiarvojen jono suppenee kohti lukua 1,587401052, joten seitsemän desimaalin tarkkuudella se on x_1 =1,5874011.
Vastaus: Luvun $\sqrt[3]{4}$ likiarvo seitsemän desimaalin tarkkuudella on 1,5874011.

5. Numeerinen derivointi

194. Funktio $f(x) = e^{x^4}$
Kohta $x_0 = 1$

Etenevää erotusosamäärä $f\,'(x_0) \approx E_+(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \dfrac{e^{(1+h)^2} - e}{h}$

Takeneva erotusosamäärä $f\,'(x_0) \approx E_-(h) = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \dfrac{e - e^{(1-h)^2}}{h}$

Taulukoidaan arvot

h	$E_+(h)$	$E_-(h)$
0,1	16,053683751	7,910204892
0,01	11,264457745	10,502829385
0,001	10,911288622	10,835176221
0,0001	10,876933960	10,869322770
0,00001	10,873507884	10,872746765

Vastaus: Taulukossa

195. Funktio $f(x) = \ln(\sin x)$
Kohta $x_0 = 1$

Etenevää erotusosamäärä $f'(x_0) \approx E_+(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{e^{(1+h)^2}-e}{h}$

Takeneva erotusosamäärä $f'(x_0) \approx E_-(h) = \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \dfrac{e-e^{(1-h)^2}}{h}$

Taulukoidaan arvot

h	$E_+(h)$	Virhe	$E_-(h)$	Virhe
0,1	0,574255950	−0,067836666	0,595503068	−0,046589548
0,001	0,641386776	−0,000705839	0,641594344	−0,000498272
0,00001	0,642085555	−0,000007061	0,642087630	−0,000004986
0,0000001	0,642092546	−0,000000070	0,642092565	−0,000000051

Vastaus: Taulukossa

196. Funktio $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
Kohta $x_0 = 2$

Keskeisdifferenssi $f'(x_0) \approx K(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \dfrac{(2+h)^{\frac{1}{2+h}}-(2-h)^{\frac{1}{2-h}}}{2h}$

Taulukoidaan arvot

h	$K(h)$
0,1	0,109390405
0,01	0,108497849
0,001	0,108488945
0,0001	0,108488856
0,00001	0,108488855

Vastaus: Taulukossa

197. Funktio $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$
Kohta $x_0 = 3$

Etenevää erotusosamäärä $f'(x_0) \approx E_+(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{e^{(1+h)^2}-e}{h}$

Takeneva erotusosamäärä $f'(x_0) \approx E_-(h) = \dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h} = \dfrac{e-e^{(1-h)^2}}{h}$

Keskeisdifferenssi $f'(x_0) \approx K(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

Taulukoidaan arvot

h	$E_+(h)$	$E_-(h)$	$K(h)$
1	21,101596552	7,622489005	14,362042778
0,1	13,372166259	12,130821286	12,751493772
0,01	12,797628886	12,673592857	12,735610871
0,001	12,741653829	12,729250325	12,735452077
0,0001	12,736070664	12,734830314	12,735450489
0,00001	12,735512491	12,735388456	12,735450473

Vastaus: Taulukossa

198. a) Lauseke $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$

Taulukoidaan likiarvot.

n	$x=2+10^{-n}$	$f(x)$
1	2,1	12,61
3	2,001	12,006001
5	2,00001	12,00006
7	2,0000001	12,0000006
9	2,000000001	12

b) Olkoon funktio $f(x) = x^3$
Tällöin $f(2) = 2^3 = 8$
Funktio $f(x) = x^3$ on derivoituvaa

Raja–arvo

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

Funktion derivaatta $f'(x) = 3x^2$
Derivaatan arvo $f'(2) = 3\cdot 2^2 = 12$
Vastaus: a) Taulukossa b) Raja-arvo on $\lim_{x\to 2} f(x) = 12$.

6. Pinta-alan numeerinen määrittäminen

199. Funktion $f(x) = 1 - x^2$ kuvaajan ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-alan likiarvo välillä [0,1] käyttäen keskipistesääntöä, kun $n = 4$.

$$\frac{1}{4}\cdot[1-(\frac{1}{8})^2]+\frac{1}{4}\cdot[1-(\frac{3}{8})^2]+\frac{1}{4}\cdot[1-(\frac{5}{8})^2]+\frac{1}{4}\cdot[1-(\frac{7}{8})^2]=\frac{43}{64}=0,671875$$

Suhteellinen virhe $\dfrac{\frac{2}{3}-0,671875}{\frac{2}{3}}\cdot 100\,\% \approx 0,78\,\%$

Vastaus: 0,671875 ja 0,78 %

200. Sekä puolisuunnikassäännön että Simpsonin säännön avulla viiden desimaalin tarkkuudella avulla käyrän
$y = 1 - x^2$ ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-alan likiarvo välillä [0,1], ja a) $n = 4$ b) $n =$ 10.

a)

Puolisuunnikassäännöllä

$f(x) = 1 - x^2$

$n = 4$

$h = \dfrac{1-0}{4} = \dfrac{1}{4}$

x	$f(x) = 1 - x^2$
0	1
$\frac{1}{4}$	0,9375
$\frac{1}{2}$	0,75
$\frac{3}{4}$	0,4375
1	0

$A = h[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)]$

$= \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2}\cdot 1 + 0,9375 + 0,75 + 0,4375 + \frac{1}{2}\cdot 0)$

=0,65625

Simpsonin säännöllä

$f(x) = 1 - x^2$

$n = 4$

$h = \dfrac{1-0}{4} = \dfrac{1}{4}$

x	$f(x) = 1 - x^2$
0	1
$\frac{1}{4}$	0,9375
$\frac{1}{2}$	0,75
$\frac{3}{4}$	0,4375
1	0

$$A = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{3} \cdot (1 + 4 \cdot 0,9375 + 2 \cdot 0,75 + 4 \cdot 0,4375 + 0)$$

$$= 0,66666...$$

b)
$f(x) = 1 - x^2$
$n = 10$

$$h = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$$

x	$f(x) = 1 - x^2$	Puolisuunnikassääntö	Simpsonin sääntö
0	1,00000	$\frac{1}{2} \cdot 1$	1
0,1	0,99000	0,99000	$4 \cdot 0,99$
0,2	0,96000	0,96000	$2 \cdot 0,96$
0,3	0,91000	0,91000	$4 \cdot 0,91$
0,4	0,84000	0,84000	$2 \cdot 0,84$
0,5	0,75000	0,75000	$4 \cdot 0,75$
0,6	0,64000	0,64000	$2 \cdot 0,64$
0,7	0,51000	0,51000	$4 \cdot 0,51$
0,8	0,36000	0,36000	$2 \cdot 0,36$
0,9	0,19000	0,19000	$4 \cdot 0,19$
1,0	0,00000	$\frac{1}{2} \cdot 0$	0
yht.		6,65000	20,0000

Puolisuunnikassäännöllä $A = \frac{1}{10} \cdot 6,65000$=0,66500

Simpsonin säännöllä $A = \frac{\frac{1}{10}}{3} \cdot 20,0 = 0,66667$

Huomataan, että Simpsonin säännöllä saadaan tarkka arvo $\frac{2}{3}$.

<u>Vastaus</u>: a) Puolisuunnikassäännöllä 0,65625 ja Simpsonin säännöllä 0,66667
b) Puolisuunnikassäännöllä 0,66500 ja Simpsonin säännöllä 0,66667

201. Funktion $f(x) = x^{0,1}(1,5 - x)(1 - e^{8(x-1)})$ kuvaajan ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-alan likiarvo välillä [0,1] käyttäen puolisuunnikassääntöä.

$n = 5$
$h = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$

x	$f(x) = x^{0,1}(1,5 - x)(1 - e^{8(x-1)})$
0	0
$\frac{1}{5}$	1,104903
$\frac{2}{5}$	0,995428
$\frac{3}{5}$	0,820321
$\frac{4}{5}$	0,546344
1	0

$A = h[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)]$
$= \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 0 + 1,104903 + 0,995428 + 0,820321 + 0,546344 + \frac{1}{2} \cdot 0)$
$\approx 0,693399$

<u>Vastaus</u>: 0,693399

202. Käyrän $y = x^3 + e^{-x}$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-alan likiarvo, kun $-1 \leq x \leq 2$ ja $n = 4$.

Puolisuunnikassäännöllä
$f(x) = x^3 + e^{-x}$
$n = 4$

$h = \dfrac{2-(-1)}{4} = 0,75$

x	$f(x) = x^3 + e^{-x}$
-1	1,718282
-0,25	1,2684
0,5	0,731531
1,25	2,23963
2	8,135335

$$A = h[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)]$$

$$= 0,75 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1,718282 + 1,2684 + 0,731531 + 2,23963 + \frac{1}{2} \cdot 8,135335)$$

$$\approx 6,874777$$

Likiarvon suhteellinen virhe verrattuna tietokoneella saatuun arvoon 6,333.

$$\frac{6,874777 - 6,333}{6,333} \approx 8,6\%$$

Simpsonin säännöllä

$$A = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{0,75}{3} \cdot (1,718282 + 4 \cdot 1,2684 + 2 \cdot 0,731531 + 4 \cdot 2,23963 + 8,135335)$$

$$\approx 6,337200$$

Likiarvon suhteellinen virhe verrattuna tietokoneella saatuun arvoon 6,333.

$$\frac{6,337200 - 6,333}{6,333} \approx 0,066\%$$

Vastaus: 6,874777 (virhe 8,6 %) ja 6,337200 (virhe 0,066 %)

7. Approksimointi

203. Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, kohdassa $x = -1$ Taylorin polynomi asteluvulla 3 ja n.

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

$f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$

$f'''(x) = -\dfrac{4!}{x^5}$

…

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$

$$P_3(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{2}{(-1)^3}\cdot(x+1) + \frac{6}{2!\cdot(-1)^4}(x+1)^2 - \frac{4!}{3!\cdot(-1)^5}(x+1)^3$$

$$= 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + 4(x+1)^3$$

Funktion $f(x)$ n. asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = -1$

$$P_n(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{2}{(-1)^3}\cdot(x+1) + \frac{6}{2!\cdot(-1)^4}(x+1)^2 - \frac{4!}{3!\cdot(-1)^5}(x+1)^3 + \ldots + \frac{(n+1)!}{n!\cdot(-1)^{n+2}}(x+1)^n$$

$$= 1 + 2(x+1) + 3(x+1)^2 + 4(x+1)^3 + \ldots + (n+1)(x+1)^n$$

<u>Vastaus</u>: $1 + 2\cdot(x+1) + 3\cdot(x+1)^2 + 4\cdot(x+1)^3$ ja
$1 + 2\cdot(x+1) + 3\cdot(x+1)^2 + 4\cdot(x+1)^3 + \ldots + (n+1)\cdot(x+1)^n$

204. Funktion $f(x) = \sqrt{1+2x}$, kohdassa $x = 0$ Taylorin polynomi asteluvulla 3.

$f(x) = \sqrt{1+2x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}$

$f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(1+2x)^5}}$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{1+2\cdot 0}}\cdot x - \frac{1}{2!\cdot\sqrt{1}}\cdot x^2 + \frac{3}{3!\cdot 1^5}\cdot x^3$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

<u>Vastaus</u>: $1 + x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3$

205. Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, kohdassa $x = 0$ Taylorin polynomi asteluvulla 3.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

$f''(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{(1-x)^5}}$

$f'''(x) = \dfrac{15}{8\sqrt{(1-x)^7}}$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot x + \frac{3}{2! \cdot 4 \cdot 1} \cdot x^2 + \frac{15}{3! \cdot 8 \cdot 1} \cdot x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$$

Vastaus: $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3$

206. Funktion $f(x) = xe^{-x}$ Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$ asteluvulla n.

$f(x) = xe^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = -2e^{-x} + xe^{-x}$

$f'''(x) = 2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = 3e^{-x} - xe^{-x}$

$f^{(4)}(x) = -3e^{-x} - (e^{-x} - xe^{-x}) = -4e^{-x} + xe^{-x}$

$\ldots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot n \cdot e^{-x} + (-1)^n \cdot xe^{-x}$

Funktion $f(x)$ n. asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 0 \cdot 1 + (1 - 0 \cdot 1) \cdot x + \frac{-2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{2!}x^2 + \frac{3 \cdot 1 - 0 \cdot 1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot 1 + (-1)^n \cdot 0 \cdot 1}{n!}x^n$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}x^n$$

Vastaus: $x - x^2 + \frac{1}{2!}x^3 - \frac{1}{3!}x^4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n-1)!}x^n$

207. a) Funktion $f(x) = (1 + x)^k$ Taylorin polynomi kohdassa $x = 0$ asteluvulla n.
$f(x) = (1 + x)^k$
$f\,'(x) = k(1 + x)^{k-1}$
$f\,''(x) = k(k-1)(1 + x)^{k-2}$
...
$f^{(n)}(x) = k(k-1)(k-2)...(k-n+1)(1 + x)^{k-n}$

$$P_n(x) = f(0) + f\,'(0)x + \frac{f\,''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$= 1^k + k\cdot 1^{k-1}\cdot x + \frac{k(k-1)\cdot 1^{k-2}}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)\cdot 1^{k-3}}{3!}x^3 + ... + \frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)\cdot 1^{k-n}}{n!}x^n$$
$$= 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)}{n!}x^n$$

b) Taylorin polynomin asteluku, kun $k = 6$ ja virhe kohdassa $x = 0{,}1$ on pienempi kuin 10^{-4}.
Funktion $f(x) = (1 + x)^6$ $(n + 1)$:nnen derivaatan lauseke
$f^{(n)}(x) = (6-n+1)!(1+x)^{6-n}$
$f^{(n+1)}(x) = (6-n)!(1+x)^{5-n}$

Taylorin polynomin virhe arvolla $x = 0{,}1$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \Big|\ x = 0{,}2; a = 0; 0 < t < 1$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(0{,}1-0)^{n+1} \qquad \Big|\ f^{(n+1)}(t) = (6-n)!(1+t)^{5-n}$$
$$= \frac{(6-n)!(1+t)^{5-n}}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{(6-n)!(1+t)^{5-n}}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1} \qquad \Big|\ 0 < t < 0{,}2$$
$$< \frac{(6-n)!(1+0)^{5-n}}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1}$$
$$= \frac{(6-n)!}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1}$$

Ehdon mukaan
$$R_{n+1} < 10^{-4}$$
$$\frac{(6-n)!}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1} < 10^{-4}$$

Taulukoidaan lausekkeen $\frac{(6-n)!}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1}$ arvoja, kun n kasvaa.

n	$\frac{(6-n)!}{(n+1)!}\cdot 0{,}1^{n+1}$
2	0,00400000
3	0,00002500
4	0,00000017
5	0,00000000

Huomataan, että kun asteluku n on 3, on virhe pienempi kuin 10^{-4}.

Vastaus: a) $1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+...+\frac{k(k-1)(k-2)...(k-n+1)}{n!}x^n$ b) asteluku n on vähintään 3.

Harjoituskoe 1

1. a) Suoritetaan jakolasku $(x^4-2x^2+1):(x^2+1)$ jakokulmassa.

$$\begin{array}{r|l} & x^2-3 \\ x^2+1 & x^4-2x^2+1 \\ & \underline{\mp x^4 \mp x^2} \\ & -3x^2+1 \\ & \underline{\pm 3x^2 \pm 3} \\ & 4 \end{array}$$

Vastaus jakoyhtälönä $(x^4-2x^2+1)=(x^2-3)(x^2+1)+4$

b) Funktio $f(x)=3x^3-5x^2-3x+5$ lauseke ensimmäisen asteen tekijöihin.

Nollakohdat

$$f(x)=0$$

$$3x^3-5x^2-3x+5=0$$

Määritetään mahdolliset rationaalijuuret

Luvun $a_0=5$ kaikki tekijät: $\pm 1, \pm 5$

Luvun $a_n=3$ kaikki tekijät: $\pm 1, \pm 3$

Mahdolliset rationaalijuuret $\frac{b_0}{b_n}$ sievennettynä $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}$

Kokeillaan

$x=1$: $\quad 3\cdot 1^3-5\cdot 1^2-3\cdot 1+5=3-5-3+5=0$

Koska $x=1$ toteuttaa yhtälön, niin se on yhtälön juuri ja polynomi $3x^3-5x^2-3x+5$ on jaollinen binomilla $x-1$. Suoritetaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x^2-2x-5 \\
\hline
x-1 & 3x^3-5x^2-3x+5 \\
 & \underline{\mp 3x^3 \pm 3x^2} \\
 & \qquad -2x^2-3x \\
 & \qquad \underline{\pm 2x^2 \mp 2x} \\
 & \qquad\qquad -5x+5 \\
 & \qquad\qquad \underline{\pm 5x \mp 5} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Yhtälön ratkaisu eli polynomin nollakohdat

$$3x^3-5x^2-3x+5=0$$

$$(x-1)(3x^2-2x-5)=0$$

$$x-1=0 \qquad \text{tai} \qquad 3x^2-2x-5=0$$

$$x=1 \qquad\qquad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}$$

$$x_1=\frac{2-\sqrt{64}}{6}=-1$$

$$x_2=\frac{2+\sqrt{64}}{6}=\frac{5}{3}$$

Funktion jako tekijöihin on $f(x)=(x+1)(x-1)(3x-5)$.

<u>Vastaus</u>: a) $(x^4-2x^2+1)=(x^2-3)(x^2+1)+4$ b) $f(x)=(x+1)(x-1)(3x-5)$

2. a) Yhtälö $\sqrt{x}=2-\ln x$

$$\sqrt{x}+\ln x-2=0$$

Tutkitaan funktiota $f(x)=\sqrt{x}+\ln x-2$, $x>0$

1° Funktio $f(x)=\sqrt{x}+\ln x-2$ on jatkuva, kun $x>0$.

$f(1)=\sqrt{1}+\ln 1-2=-1>0$

$f(9)=\sqrt{9}+\ln 9-2=1+\ln 9>0$

Koska funktion arvot välin [1,9] päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on Bolzanon lauseen perusteella välillä $]1,9[$ ainakin yksi nollakohta.

2° Funktio $f(x)=\sqrt{x}+\ln x-2=x^{\frac{1}{2}}+\ln x-2$ on derivoituva, kun $x>0$.

Derivaatta $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}= {}^{\sqrt{x})}\frac{1}{2\sqrt{x}}+{}^{2)}\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}+2}{2x}$ > 0, kun $x>0$.

Funktio on aidosti kasvava, joten funktiolla $f(x) = \sqrt{x} + \ln x - 2$ on korkeintaan yksi nollakohta.

Kohdista 1° ja 2° seuraa, että funktiolla $f(x) = \sqrt{x} + \ln x - 2$ on täsmälleen yksi nollakohta, joten yhtälöllä $\sqrt{x} = 2 - \ln x$ on täsmälleen yksi juuri. □

b) Ratkaistaan yhtälö $\sqrt{x} + \ln x - 2 = 0$
Tutkitaan funktiota $f(x) = \sqrt{x} + \ln x - 2$
Derivaatta $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 2}{2x}$
Newtonin menetelmän iteroimiskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n} + \ln x_n - 2}{\frac{\sqrt{x_n} + 2}{2x_n}}$$

Nollakohta Newtonin menetelmällä
Alkuarvo $x_0 = 2$

n	x_n	x_{n+1}
0	2,00000000	1,87421907
1	1,87421907	1,87731962
2	1,87731962	1,87732167
3	1,87732167	1,87732167

Likiarvojen jono suppenee kohti lukua 1,87732167, joten kahden desimaalin tarkkuudella se on $x_1 = 1{,}88$.

Newtonin menetelmässä määrätään funktion kuvaajalle tangentti alkuarvon osoittamaan kohtaan. Tämän jälkeen lasketaan tangentin ja x–akselin leikkauspiste, jota käytetään uutena alkuarvona. Tätä toistetaan kunnes nollakohta on saatu määrättyä vaadittavalla tarkkuudella.

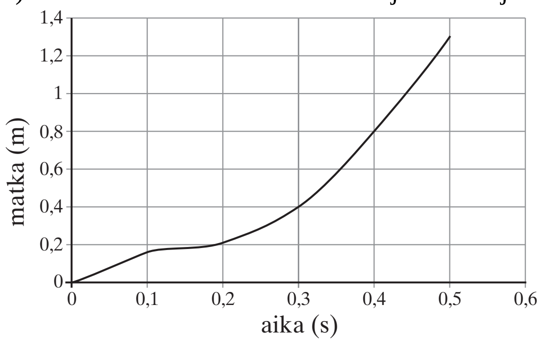
Vastaus: Yhtälön juuri on 1,88.

3. Funktio $f(x) = x^3$
Muuttujan arvo $x = 1{,}245$
Pyöristetty arvo 1,25
Absoluuttinen virhe $|1{,}245^3 - 1{,}25^3| = 0{,}023343875 < 0{,}03$
Suhteellinen virhe $\left|\dfrac{1{,}245^3 - 1{,}25^3}{1{,}245^3}\right| = 0{,}01209... \approx 1{,}2\,\%$
Vastaus: Absoluuttinen virhe on 0,03 ja suhteellinen virhe 1,2 %.

4. Kappaleen putoamista tutkittaessa saatiin seuraavanlaiset tulokset:

Aika (s)	Matka (m)
0	0
0,1	0,16
0,2	0,21
0,3	0,40
0,4	0,80
0,5	1,3

a) Piirretään koordinaatistoon kuvaaja matka ajan funktiona.



Määritetään taulukon avulla 2. asteen malli riippuvuuden välille.
Toisen asteen polynomifunktio $y = ax^2 + bx + c$
Kuvaaja kulkee pisteiden (0,0), (0,2; 0,21) ja (0,4; 0,80) kautta.

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0,21 = a \cdot 0,2^2 + b \cdot 0,2 + c \\ 0,8 = a \cdot 0,4^2 + b \cdot 0,4 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0,21 = 0,04a + 0,2b + c \\ 0,8 = 0,16a + 0,4b + c \end{cases}$$

Sijoitetaan ylimmän yhtälön $c = 0$ muihin yhtälöihin.

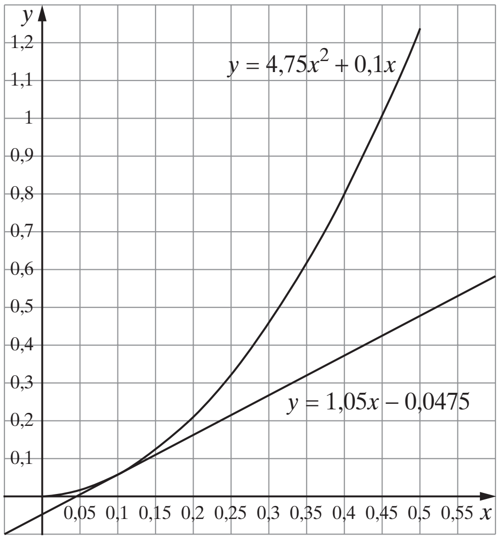
$$\begin{cases} 0,04a + 0,2b = 0,21 \\ 0,16a + 0,4b = 0,8 \end{cases}$$

Ylemmästä yhtälöstä saadaan $a = 5,25 - 5b$. Sijoitetaan alempaan yhtälöön.

$$0,16(5,25 - 5b) + 0,4b = 0,8$$
$$-0,4b = -0,04 \qquad |:(-0,4)$$
$$b = 0,1$$

Lasketaan a: $a = 5,25 - 5b = 5,25 - 5 \cdot 0,1 = 4,75$
Toisen asteen malli riippuvuuden välille on $y = 4,75x^2 + 0,1x$

b) Hetkellinen nopeus $y'(x) = 9,5x + 0,1$
Hetkellinen nopeus, kun aikaa on kulunut alusta 0,10 s: $y'(0,10) = 9,5 \cdot 0,1 + 0,1 = 1,05$
Nopeus graafisesti



Tangentti kulkee pisteiden (0,05; 0) ja (0,5; 0,48) kautta.

Nopeus on tangentin kulmakerroin $k_t = \dfrac{0{,}48 - 0}{0{,}5 - 0{,}45} \approx 1{,}1$

Vastaus: a) Toisen asteen malli on $y = 4{,}75x^2 + 0{,}1x$. b) Nopeus on 1,1 m/s.

5. Lasketaan Taylorin polynomia käyttäen luvun e^2 kaksidesimaalinen likiarvo.
Funktio $f(x) = e^x$
Taylorin polynomi kohdassa $x = a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)\,(x - a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)\,(x - a)^3 + \ldots$$

Derivaatat ja termit kohdassa $x = 0$

n	Derivaatta	Arvo
1	$f(x) = e^x$	$f(0) = e^0 = 1$
2	$f'(x) = e^x$	$f'(0) = 1$
3	$f''(x) = e^x$	$f''(0) = 1$
4	$f'''(x) = e^x$	$f'''(0) = 1$
5	$f^{(4)}(x) = e^x$	$f^{(4)}(0) = 1$

Taylorin polynomi, kun $a = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2!} f''(0)\,(x - 0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\,(x - 0)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)(x - 0)^4 + \ldots$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)x^4 + \ldots$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$$

Funktion arvo, kun $x = 2$

$e^2 = f(2) = 1 + 2 + \frac{1}{2!} \cdot 2^2 + \frac{1}{3!} \cdot 2^3 + \frac{1}{4!} \cdot 2^4 + \dots$

Taulukoidaan arvoja

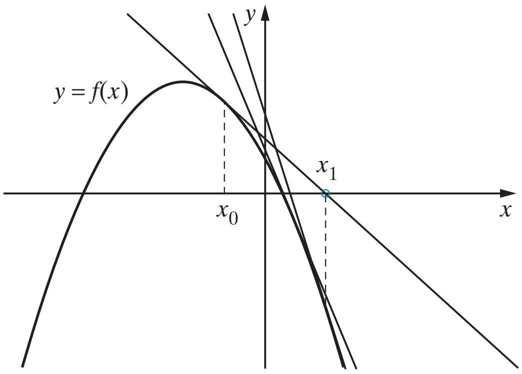
Termi	Arvo
0	1
1	2
2	2
3	1,333333333
4	0,666666667
5	0,266666667
6	0,088888889
7	0,025396825
8	0,006349206
9	0,001410935
10	0,000282187
Termien summa	7,388994709

Vastaus: Kaksidesimaalinen likiarvo on 7,39.

6. a) Johdetaan Newtonin menetelmän iteroimiskaava $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Oletetaan, että funktio f on jatkuva ja derivoituva nollakohdan läheisyydessä. Määritettäessä funktion f nollakohtaa Newtonin menetelmällä aloitetaan lähellä nollakohtaa olevasta alkuarvosta $x = x_0$. Määritetään tähän kohtaan käyrälle $y = f(x)$ tangentti ja lasketaan tangentin ja x-akselin leikkauspiste $x = x_1$. Valitaan tämä uudeksi alkukohdaksi ja määritetään käyrälle $y = f(x)$ tähän kohtaan tangentti, jonka leikkauspiste x-akselin kanssa lasketaan. Näin jatkamalla saadaan funktion nollakohdan likiarvo hyvin nopeasti laskettua.

Newtonin menetelmässä on tärkeää, että iteroinnin alkuarvo on riittävän lähellä nollakohtaa. Varsinkin jaksollisten funktioiden tapauksessa voi käydä niin, että haluttua nollakohtaa ei löydetä vaan päädytään johonkin muuhun nollakohtaan.



Määritetään funktion $f(x)$ nollakohta. Valitaan kohta $x = x_0$.
Käyrän $y = f(x)$ kohtaan $x = x_0$ piirretyn tangentin yhtälö

$$y - y_0 = k_t(x - x_0) \qquad | \; y_0 = f(x_0),\; k_t = f'(x_0)$$
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste saadaan sijoittamalla $y = 0$ tangentin yhtälöön.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad | \; y = 0$$
$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$$
$$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0) \quad |: f'(x_0) \neq 0$$
$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Valitaan saatu kohta x uudeksi alkukohdaksi x_0 ja toistetaan edellä olevat toimenpiteet.
Tällä tavalla saadaan aina seuraava nollakohdan likiarvo kaavalla $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

b) Määritä Newtonin menetelmää käyttäen funktion $f(x) = \ln x + e^x$ nollakohta neljän desimaalin tarkkuudella.
Funktio $f(x) = \ln x + e^x$

Derivaatta $f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^x = \dfrac{xe^x + 1}{x}$

Newtonin menetelmän iteroimiskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln x_n + e^{x_n}}{\dfrac{x_n e^{x_n} + 1}{x_n}}$$

Nollakohta Newtonin menetelmällä
Alkuarvo $x_0 = 2$

n	x_n	x_{n+1}
0	2,00000000	0,97551707
1	0,97551707	0,26099532
2	0,26099532	0,26977383
3	0,26977383	0,26987413
4	0,26987413	0,26987414
5	0,26987414	0,26987414

Likiarvojen jono suppenee kohti lukua 0,26987414, joten kahden desimaalin tarkkuudella se on x_1 = 0,2699.

Vastaus: Nollakohta on 0,2699.

7. Funktio $f(x) = \sqrt{x^2 + e^{2x}}$

Derivaatta keskeisdifferenssiä käyttäen kolmen desimaalin tarkkuudella

Funktio $f(x) = \sqrt{x^3 + x}$

Kohta $x_0 = 1$

Keskeisdifferenssi

$$f'(x_0) \approx K(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{\sqrt{(1+h)^2 + e^{2(1+h)}} - \sqrt{(1-h)^2 + e^{2(1-h)}}}{2h}$$

Taulukoidaan arvot

h	$K(h)$
0,1	2,900639
0,01	2,896429
0,001	2,896387
0,0001	2,896387

Vastaus: Taulukosta nähdään, että likiarvo on 2,896.

8. Pinta-ala Simpsonin säännöllä käyttäen neljää jakoväliä.

Simpsonin säännöllä

Funktio $f(x) = x^3 - x$

Nollakohdat

$f(x) = 0$

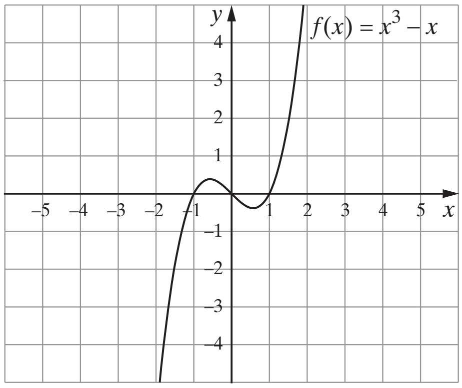
$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

Kuvaaja



Jakovälit $n = 4$

Jakovälin pituus $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

Pinta-ala välillä [−1,0]

x	$f(x) = x^3 - x$
-1	0
$-\frac{3}{4}$	0,328225
$-\frac{1}{2}$	0,375
$-\frac{1}{4}$	0,234375
0	0

$$A = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{3} \cdot (0 + 4 \cdot 0,328125 + 2 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,234375 + 0)$$

$$= 0,25$$

Symmetrian perusteella ala on 2·0,25 = 0,5

Vastaus: Ala on 0,5.

Harjoituskoe 2

1. Funktio $f(x) = \ln(x + 1)$
Taylorin polynomi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(a)(x-a)^4 + \dots$$

Derivaatat ja termit kohdassa $x = 0$

n	Derivaatta	Arvo	Termi
1	$f(x) = \ln(x + 1)$	$f(0) = \ln(0 + 1) = 0$	0
2	$f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$	$f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$	x
3	$f''(x) = -(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$	$f''(0) = -\frac{1}{(0+1)^2} = -1$	$-\frac{1}{2}x^2$
4	$f'''(x) = 2(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$	$f'''(0) = \frac{2}{(0+1)^3} = 2$	$\frac{1}{3}x^3$
5	$f^{(4)}(x) = -6(x+1)^{-4} = -\frac{6}{(x+1)^4}$	$f^{(4)}(0) = -\frac{6}{(0+1)^2} = -6$	$-\frac{1}{4}x^4$

Vastaus: Taylorin polynomin viisi ensimmäistä termiä kohdassa $x = 0$ ovat 0, x, $-\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{3}x^3$ ja $-\frac{1}{4}x^4$.

2. a) Luvut $a = 2{,}161 \pm 0{,}002$ ja $b = 2{,}1 \pm 0{,}3$.
Lausekkeen $a + b$ arvo $a + b = 2{,}161 + 2{,}1 = 4{,}261$
Lausekkeen $a + b$ pienin arvo $a + b = 2{,}159 + 1{,}8 = 3{,}959$
Virhe $4{,}261 – 3{,}959 = 0{,}302$
Lausekkeen $a + b$ suurin arvo $a + b = 2{,}163 + 2{,}4 = 4{,}563$
Virhe $4{,}563 – 4{,}261 = 0{,}302$
Lausekkeen $a + b$ arvo virherajoineen $a + b = 4{,}2 \pm 0{,}3$

Lausekkeen ab arvo $ab = 2{,}161 \cdot 2{,}1 = 4{,}5381$
Lausekkeen ab pienin arvo $ab = 2{,}159 \cdot 1{,}8 = 3{,}8862$
Virhe $4{,}5381 – 3{,}8862 = 0{,}6519$
Lausekkeen ab suurin arvo $ab = 2{,}163 \cdot 2{,}4 = 5{,}1912$
Virhe $5{,}1912 – 4{,}5381 = 0{,}6531$
Lausekkeen ab arvo virherajoineen $ab = 4{,}5 \pm 0{,}7$

b) Funktio $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}$

Suhteellinen virhe $\dfrac{\left|f(\sqrt{5})-f(2,2)\right|}{f(\sqrt{5})}=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}-1}-\dfrac{2,2+2}{3\cdot 2,2-1}\right|}{\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}-1}}=0,01064...\approx 1,1\%$

<u>Vastaus</u>: a) $a + b = 4,2 \pm 0,3$ ja $ab = 4,5 \pm 0,7$ b) 1,1 %

3. Jaetaan polynomi $x^5 - x^3 + x - 9$ jaetaan trinomilla $x^2 - x + 3$ jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 + x^2 - 3x - 6 \\
x^2 - x + 3 \,\big) & x^5 \qquad - x^3 \qquad + x - 9 \\
 & \underline{\mp x^5 \pm x^4 \mp 3x^3} \\
 & x^4 - 4x^3 \\
 & \underline{\mp x^4 \pm x^3 \mp 3x^2} \\
 & -3x^3 - 3x^2 + x \\
 & \underline{\pm 3x^3 \mp 3x^2 \pm 9x} \\
 & -6x^2 + 10x - 9 \\
 & \underline{\pm 6x^2 \mp 6x \pm 18} \\
 & 4x + 9
\end{array}
$$

<u>Vastaus</u>: Jakojäännös on $4x + 9$.

4. Yhtälö $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$
Vakiotermin 6 tekijät ±1, ±2, ±3, ±6
Korkeimman asteen termin tekijät ±1
Mahdolliset rationaalilukunollakohdat ±1, ±2, ±3, ±6
Sijoittamalla $x = 1$, saadaan $1^3 + 4\cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$, joten $x - 1$ on polynomin $f(x)$ tekijä.
Suoritetaan jakolasku jakokulmassa.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 + 5x + 6 \\
x - 1 \,\big) & x^3 + 4x^2 + x - 6 \\
 & \underline{\mp x^3 \pm x^2} \\
 & 5x^2 + x \\
 & \underline{\mp 5x^2 \pm 5x} \\
 & 6x - 6 \\
 & \underline{\mp 6x \pm 6} \\
 & 0
\end{array}
$$

Ratkaistaan nollakohdat

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$$
$$x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$x = 1$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2} = -2$$

Vastaus: Juuret ovat 1, –2 ja –3.

5. Funktio $f(x) = x^{\ln x}$

Kohta $x_0 = 2$

Keskeisdifferenssi $f'(x_0) \approx K(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = \dfrac{(2+h)^{\ln(2+h)} - (2-h)^{\ln(2-h)}}{2h}$

Taulukoidaan arvot

h	$K(h)$
1	1,171634316062
0,00001	1,120684986389
0,000000001	1,120684989253
$1 \cdot 10^{-13}$	1,120215031847

Vastaus: Taulukossa

6. Käyrä $y = -x^2 + 4x$

Käyrän ja ja x-akselin leikkauspisteet

$$y = 0$$
$$-x^2 + 4x = 0$$
$$x(-x + 4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Käyrän ja ja x-akselin väliin jäävän alueen alan likiarvo Simpsonin säännön avulla jakamalla väli kahdeksaan osaan.

Pinta-ala $A = \dfrac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

Välin leveys $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{4 - 0}{8} = 0{,}5$

Taulukoidaan arvot.

x	$f(x)$	Summan termit
0,0	0,00	0,00
0,5	1,75	7,00
1,0	3,00	6,00
1,5	3,75	15,00
2,0	4,00	8,00
2,5	3,75	15,00
3,0	3,00	6,00
3,5	1,75	7,00
4,0	0,00	0,00
	Yhteensä	64

Pinta-ala

$$A = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \frac{0,5}{3} \cdot 64 \approx 10,7$$

<u>Vastaus</u>: Pinta-ala on 10,7.

7. Osoitetaan, että yhtälöllä $x^3 + x = 1$ on täsmälleen yksi juuri.

Yhtälö $x^3 + x = 1$

$x^3 + x - 1 = 0$

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^3 + x - 1$ on täsmälleen yksi nollakohta.

1° Funktio $f(x) = x^3 + x - 1$ on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla.

$f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1 < 0$

$f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 > 0$

Koska funktion arvot välin [0,1] päätepisteissä ovat erimerkkiset, funktiolla on Bolzanon lauseen perusteella välillä]0,1[ainakin yksi nollakohta.

2° Funktio $f(x) = x^3 + x - 1$ on polynomifunktiona derivoituva kaikkialla

Derivaatta $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0$

Funktio on aidosti kasvava, joten funktiolla $f(x) = x^3 + x - 1$ on korkeintaan yksi nollakohta.

Kohdista 1° ja 2° seuraa, että funktiolla $f(x) = x^3 + x - 1$ on täsmälleen yksi nollakohta. □

Funktion $f(x) = x^3 + x - 1$ nollakohta sekanttimenetelmää käyttäen.

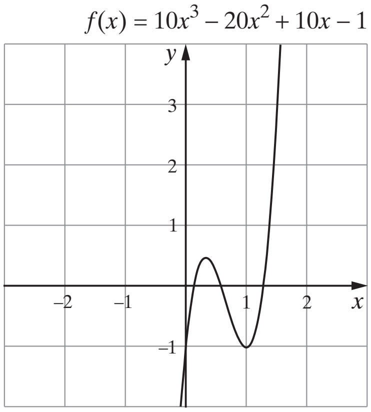
Uusi välin päätepiste $c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$

a	*b*	*c*	*f*(*a*)	*f*(*b*)
0,00000000	1,00000000	0,50000000	−1,00000000	1,00000000
1,00000000	0,50000000	0,63636364	1,00000000	−0,37500000
0,50000000	0,63636364	0,69005236	−0,37500000	−0,10593539
0,63636364	0,69005236	0,68202042	−0,10593539	0,01863614
0,69005236	0,68202042	0,68232578	0,01863614	−0,00073652
0,68202042	0,68232578	0,68232780	−0,00073652	−0,00000485
0,68232578	0,68232780	0,68232780	−0,00000485	0,00000000

Nollakohta on välillä] 0,68232578; 0,68232780 [, joten neljän desimaalin tarkkuudella se on $x_1 = 0,6823$.

<u>Vastaus</u>: Yhtälön juuri on 0,6823.

8. Yhtälö $10x^3 - 20x^2 + 10x - 1 = 0$
Tutkitaan funktiota $f(x) = 10x^3 - 20x^2 + 10x - 1$



Derivaatta $f'(x) = 30x^2 - 40x + 10$
Newtonin menetelmän iteroimiskaava

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{10x_n^3 - 20x_n^2 + 10x_n - 1}{30x_n^2 - 40x_n + 10}$$

Alkuarvo $x_0 = 0{,}5$
Nollakohta Newtonin menetelmällä

n	x_n	x_{n+1}
0	0,500000000	0,600000000
1	0,600000000	0,587500000
2	0,587500000	0,587394436
3	0,587394436	0,587394428
4	0,587394428	0,587394428

Likiarvojen jono suppenee kohti lukua 0,587394428, joten kuuden desimaalin tarkkuudella se on $x_1 = 0{,}587394$.
Vastaus: Yhtälön keskimmäinen juuri on 0,587394.

Harjoituskoe 3

1. $\dfrac{x^5-1}{x+2}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4-2x^3+4x^2-8x \\
\hline
x+2 & x^5 \qquad\qquad\qquad -1 \\
 & \underline{\mp x^5 \mp 2x^4} \\
 & -2x^4 \\
 & \underline{\pm 2x^4 \pm 4x^3} \\
 & 4x^3 \\
 & \underline{\mp 4x^3 \mp 8x^2} \\
 & -8x^2 \\
 & \underline{\pm 8x^2 \mp 16x} \\
 & -6x-1
\end{array}
$$

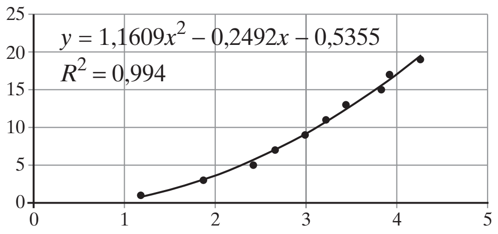
<u>Vastaus</u>: $x^4-2x^3+4x^2-8x+\dfrac{16x-1}{x+2}$

2.
$x^3-3x^2-2x+6=0$
Ryhmitellään
$x^2(x-3)-2(x-3)=0$
$(x^2-2)(x-3)=0$
$x^2-2=0$ tai $x-3=0$
$x=\pm\sqrt{2}$ $\qquad x=3$

<u>Vastaus</u>: $\pm\sqrt{2}$ tai 3

3.

aika (t)	matka (m)
1,18	1
1,87	3
2,42	5
2,66	7
2,99	9
3,22	11
3,44	13
3,83	15
3,92	17
4,26	19



2. asteen malli mopon kulkeman ajan (s) ja matkan (m) riippuvuuden välillä
$f(x) = 1{,}1609x^2 - 0{,}2492x - 0{,}5355$
Mopon kulkema matka 2 sekunnin kuluttua lähdöstä.
$f(2) = 1{,}1609 \cdot 2^2 - 0{,}2492 \cdot 2 - 0{,}5355 \approx 3{,}6$ (m)

Vastaus: $f(x) = 1{,}1609x^2 - 0{,}2492x - 0{,}5355$ ja 3,6 m

4.
$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$
$f'''(x) = 24x$
$f^{(4)}(x) = 24$
$f^{(5)}(x) = 0$

$f(-1) = (-1)^4 = 1$
$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 = -4$
$f''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 = 12$
$f'''(-1) = 24 \cdot (-1) = -24$
$f^{(4)}(-1) = 24$
$f^{(5)}(-1) = 0$

Monomi x^4 Taylorin polynomin avulla binomin $x + 1$ kasvavien potenssien lausekkeena. Koska 5. ja sitä suuremmat derivaatat saavat arvon nolla, riittää muodostaa 4. asteen Taylorin polynomi kohdassa $x = -1$.

$$\begin{aligned}P_4(x) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}(x+1)^4 \\ &= 1 - 4(x+1) + \frac{12}{2!}(x+1)^2 + \frac{-24}{3!}(x+1)^3 + \frac{24}{4!}(x+1)^4 \\ &= 1 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4\end{aligned}$$

Vastaus: $1 - 4(x + 1) + 6(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3 + (x + 1)^4$

5. Luvun $\sqrt[3]{2}$ likiarvo viiden desimaalin tarkkuudella Newtonin menetelmää käyttäen.

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
2	1,0000000	1,3333333
3	1,3333333	1,2638889
4	1,2638889	1,2599335
5	1,2599335	1,2599211
6	1,2599211	1,2599210
7	1,2599210	1,2599210

Vastaus: 1,25992

6. Funktion $f(x) = (x+1)^{2x}$ derivaatan likiarvo keskeisdifferenssiä käyttäen kohdassa $x = 3$ muutoksen h arvoilla 1; 0,000 01; 0,000 000 001 ja 0,000 000 000 00 1.

Derivaatan likiarvo $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

Taulukoidaan derivaatan likiarvoja.

d	$f'(3)$
0,1000000000000	18092,9197872459000
0,0000100000000	17500,5234119908000
0,0000000010000	17500,5261553451000
0,0000000000010	17502,5434145936000

7. Käyrän $y = \sqrt{1+x^3}$ ja x-akselin väliin välillä [0,4] jäävän alueen alan likiarvo Simpsonin säännön avulla, kun $n = 8$.

$f(x) = \sqrt{1+x^3}$

$n = 8$

$h = \frac{4-0}{8} = \frac{1}{2}$

x	$f(x) = \sqrt{1+x^3}$
0	1
0,5	1,06066
1	1,414214
1,5	2,09165
2	3
2,5	4,077377
3	5,291503
3,5	6,623821
4	8,062258

$$A = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + ... + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{3} \cdot (1 + 4 \cdot 1,06066 + 2 \cdot 1,414214 + 4 \cdot 2,09165 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4,077377 + 2 \cdot 5,291503 + 4 \cdot 6,623821 + 8,062258)$$

$$\approx 13,981287$$

Likiarvon suhteellinen virhe, kun tietokoneella saatu tulos on 13,9829.

$$\frac{13,9829 - 13,981287}{13,9829} \approx 0,012\,\%$$

Vastaus: 13,981287 ja 0,012 %

8.
1)
$f(x) = 5^x - 9x + 2$
$f(0) = 3$
$f(1) = -2$
$f(2) = 9$
Koska funktio on jatkuva ja se vaihtaa välillä [0,2] merkkinsä 2 kertaa, on tällä välillä vähintään 2 nollakohtaa.
2)
$f'(x) = 5^x \ln 5 - 9$
$5^x \ln 5 - 9 = 0$

$$5^x = \frac{9}{\ln 5}$$

$$x = \frac{\ln \frac{9}{\ln 5}}{\ln 5} = 1,2454...$$

Kulkukaavio

		1,2454…		
$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	x

$f'(0) < 0$
$f'(2) > 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on aidosti vähenevä, kun $x < 1,2454...$, joten tällä välillä on korkeintaan1 nollakohta.
Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on aidosti kasvava, kun $x > 1,2454...$, joten tällä välillä on korkeintaan1 nollakohta.
Kohdista 1) ja 2) seuraa, että funktiolla $f(x) = 5^x - 9x + 2$ on tasan 2 nollakohtaa.
Määritetään pienemmän nollakohdan
likiarvo sekanttimenetelmää käyttäen kahden desimaalin tarkkuudella.

a	f(a)	b	f(b)	c
0,000000000	3,000000000	1,000000000	-2,000000000	0,600000000
1,000000000	-2,000000000	0,600000000	-0,773472196	0,347752251
0,600000000	-0,773472196	0,347752251	0,620352018	0,460020641
0,347752251	0,620352018	0,460020641	-0,043464842	0,452669625
0,460020641	-0,043464842	0,452669625	-0,001965851	0,452321400
0,452669625	-0,001965851	**0,452321400**	0,000007222	0,452322675
0,452321400	0,000007222	0,452322675	-0,000000001	0,452322675
0,452322675	-0,000000001	0,452322675	0,000000000	0,452322675

Vastaus: 0,45